EUCLIDES

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

49e jaargang
1973/1974
no 7/8
maart/april

W&S nummer

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt ƒ 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ 21,50. Hiervoor wende men zich tot:

Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Dr. J.H. Wansink - 80 jaar



Het is gemakkelijker in boeken en tijdschriften dan in je geheugen te bladeren. Ik weet niet meer, wanneer ik Dr. Wansink voor 't eerst heb gezien en gesproken. Het zal niet zo lang na de tweede wereldoorlog zijn geweest, en dan natuurlijk in de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O. In elk geval staat mij als een der ontmoetingsplaatsen nog levendig voor ogen het Conferentie-Weekend op het Maarten-Maartens-Huis te Doorn op 13-14 november 1948, het eerste in een lange rij door de Wiskunde Werkgroep georganiseerde weekends. Eer ik deze regels schreef, heb ik derhalve het verslag van deze Conferentie in de 24e jaargang van dit tijdschrift geraadpleegd — lezingen en rapporten over de — uitgebreide — discussies. Wij allen, die eraan deelnamen en nog leven, zijn toen een kwarteeuw jonger geweest dan heden, maar bij het herlezen van het verslag verbaasde het mij te zien hoe weinig wij veranderd zijn.

Dr. Wansinks naam komt in elke discussie meermalen voor. Het was een rustige discussie behalve — uiteraard — na die lezing die ik hield. (Er zijn een aantal gezegden die men hierbij kan aanhalen, in de geest van 'zo men doet, zo men ontmoet'.) 'Door verschillende aanwezigen werd op dit standpunt van Prof. Fr. scherp commentaar geleverd' staat er in dit verslag, en 'Dr. Wansink verdedigt, bijgestaan door anderen, het standpunt van de leraren'. En na mijn repliek 'houdt Dr. Wansink een vurig pleidooi voor het standpunt van de leraren', om tot slot met 'Applaus' (tussen haakjes) beloond te worden. Wat mijn 'standpunt' en 'het standpunt van de leraren' was, doet niet meer terzake; toen was het in elk geval iets om vurige pleidooien voor en tegen te houden, zoals men toen nog in de strijd tegen en vóór de beschrijvende meetkunde warm kon lopen.
Maarten-Maartens-Huis was de eerste noch de laatste gelegenheid voor Dr. Wansink en mij om de degens te kruisen — in tegendeel we hebben er geen die zich aanbood, laten voorbijgaan en ik ben er van overtuigd, dat hij er even blij om is als ik het ben. Het waren van die discussies, waarin men ontzaglijk veel leert; standpunten te vormen en te verdedigen, zijn eigen denkbeelden aan die van anderen te toetsen, maar vooral elkaar als mens tot mens in de ogen te zien en te waarderen. Ik bedoel het woordelijk: we hebben elkaar vaak in de ogen gezien en we waarderen elkander.
'Vurig pleidooi' is geen dooddoener, als het om Dr. Wansink gaat. Al wat hij zegt, is een pleidooi, doordacht en met overtuiging uitgesproken, oprecht en zonder bijbedoeling. Daarom hebben onze verhitte discussies, ook in de verste verte, nooit onze vriendschap kunnen bedreigen. Wat elk de ander heeft geschonken en wat wij derhalve samen de buitenwacht hebben mogen schenken — ik geloof dat ieder van ons tweeën na een kwarteeuw er dankbaar voor is.
Ik had veel meer en veel meer zakelijks kunnen zeggen over een jubilaris, die op een levenswerk als dat van Dr. Wansink kan terugblikken, maar ik begin er niet aan. Het was me een behoefte, van zeer persoonlijke gevoelens zeer persoonlijk blijk te geven, en ik wil dit laten culmineren in een hartelijke gelukwens, een — denkbeeldige — stevige handdruk en een blik — uit de verte — in elkaars ogen, in 't vertrouwen dat wie dit leest, het in gedachten net zo echt meebeleeft als het gemeend is.

Hans Freudenthal

W & S nummer

Bijna twintig jaar geleden bracht de toenmalige Leerplan-Commissie-1954 van Wimecos (onder voorzitterschap van Dr. Joh. Wansink) een rapport uit inzake het opstellen van een ontwerp-leerplan en ontwerp-eindexamenprogramma voor wiskunde voor de H.B.S.-B.
In dit rapport werd door de commissie aanbevolen statistiek in het leerplan op te nemen. In nummer IV van de dertigste jaargang van Euclides vinden we de uitvoerige toelichting van de commissie waarin deze keuze van het vak statistiek wordt verdedigd. Er kwamen echter zoveel bezwaren binnen, vooral van leraren die overlading van de leerstof vreesden, dat de Wimecos-commissie het voorstel in 1957 terugnam en dus ook het vak statistiek niet voorkwam in het nieuwe leerplan van 1958.

Nu het dan toch in het leerplan van de bovenbouw van het vwo is opgenomen komt het de redactie van Euclides goed voor in dit nummer eens extra aandacht aan het vak te schenken.
Bij hen die straks samen met hun leerlingen in de problematiek van de waarschijnlijkheidsrekening en de statistiek moeten duiken, zullen wel een aantal vragen leven, bijvoorbeeld:
— *wat is de inhoud van het leerplan?*
— *waarom is deze inhoud juist zo gekozen?*
— *welke rol speelt de statistiek eigenlijk in bedrijfsleven en wetenschap?*
— *bereidt het leerplan voldoende voor op de toepassing van de statistiek in het bedrijfsleven?*
— *van welke ervaringen met onderwijs in de statistiek zouden we al gebruik kunnen maken?*
— *is het mogelijk de leerlingen grotendeels zelfstandig de leerstof te laten door doorwerken?*
— *zijn er hulpmiddelen voor het onderwijs in de kansrekening nodig? Waar zijn die verkrijgbaar?*

Er zijn ongetwijfeld nog meer vragen te stellen. Het zou mooi geweest zijn als dit nummer van Euclides al die vragen zou kunnen bespreken. Dat is echter niet het geval. Bij de voorbereidende bespreking voor het vervaardigen van dit nummer bleek wel dat de hele problematiek van het onderwijs in statistiek en waarschijnlijkheidsrekening nog veel discussie en doordenking vraagt. We bevinden ons wat dit onderwijs betreft nog in een oriënterende fase. Onderwijskundig is het nog maar nauwelijks doordacht. Wie deze vakken moet gaan onderwijzen kan moeilijk terugvallen op eigen ervaringen, want vrijwel geen enkele docent heeft als leerling het onderwijs in statistiek of waarschijnlijkheidsrekening meegemaakt.
Het is begrijpelijk dat iemand die leest dat het onderwijs in de kansrekening vooral speels moet gebeuren zich afvraagt hoe dat spel dan wel gespeeld zal moeten worden. Welke materialen zijn er voor dat spel?

Er zal veel worden gevraagd van de pioniers die straks voor het eerst statistiek en waarschijnlijkheidsrekening gaan onderwijzen. Hun ervaringen zullen voor volgende jaren van grote betekenis zijn. Hoe lieten ze hun leerlingen werken aan deze materie? Hadden ze genoeg voorbeelden? Was de beschikbare tijd voldoende? Deze ervaringen en andere zullen in de komende nummers van Euclides besproken moeten worden. Ieder die meent dat iets goed gelukt (of misschien ook grandioos mislukt) is, doet zijn collega's een groot plezier door zijn ervaringen in Euclides te bespreken en te analyseren. In die zin moet dit W & S nummer een begin zijn.

De artikelen in dit nummer kunnen in enkele groepen verdeeld worden:
(a) de artikelen die zich bezig houden met problemen rondom het opstellen van een leerplan voor nu of voor morgen (Freudenthal, van Hiele, Nijdam, Schmidt)
(b) de artikelen die enkele onderwijskundige mogelijkheden bespreken (Sloff, Nijdam)
(c) de twee artikelen van mensen die in een groot bedrijf de statistiek als een gereedschap gebruiken (Krooshof, 't Sas)
(d) de artikelen die wat verder kijken dan alleen de bovenbouw van het vwo, bijvoorbeeld naar de mogelijkheid van statistiek in het basisonderwijs (Freudenthal, Goffree)
In de artikelen genoemd onder (d) is de blik op de toekomst gericht. Over enkele jaren zal het programma voor het onderwijs in deze vakken in de bovenbouw van het vwo er anders uit kunnen zien dan nu, omdat of in het basisonderwijs of in de onderbouw van het avo andere fundamenten zijn gelegd dan nu aanwezig zijn.
Dan zal ook dit W & S nummer verouderd zijn. We hopen dat het in de huidige situatie de betekenis kan hebben van een mogelijkheid tot bezinning bij het ingaan van een nieuwe situatie.

Waarschijnlijkheid en statistiek op school

PROF. DR. H. FREUDENTHAL

Utrecht

In 't begin van deze eeuw hoorden kansbeschouwingen in sommige landen tot de wiskunde van de bovenbouw — ik bedoel die combinatoriek van uit een vaas met zoveel rode, witte, blauwe balletjes zo en zoveel van elke soort te trekken — de leraar deed een som voor, desnoods een tweede, waarna de leerlingen met gewijzigde proporties en kleuren de rest zelf moesten doen. Mét de boldriehoeksmeting en de stellingen van Menelaos en Cern is deze stof van het programma verdwenen.
Na de tweede wereldoorlog, maar al vóór de Sputnik-New-Math werd de Statistiek op school hier en daar aan de orde gesteld. Waarom?
Statistiek — preciezer: mathematische statistiek in tegenstelling tot beschrijvende — werd steeds meer toegepast in wetenschap en bedrijfsleven; een absolvent van het voortgezet onderwijs zou bij verdere studie of in een toekomstig beroep vast en zeker met statistische problemen in aanraking komen, en zou de school hem daar niet op voor moeten bereiden?
Nu is wat zich zo aan statistische activiteiten afspeelt, niet over de hele lijn overtuigend. Bij de industrie zitten uitmuntende statistici naast anderen die wat statistische recepten mechanisch kunnen toepassen. Een bioloog — R.A. Fischer — was de geniale schepper van hele hoofdstukken van de moderne statistiek, en statistische methoden zijn overtuigend toegepast in landbouw en veeteelt, hetgeen veel minder overtuigend in de psychologie is nagedaan. Op de stoomcursussen statistiek voor psychologen — 10 uur in 't eerste semester — kijken de sociologen al met naijver, terwijl minder enthousiaste lieden zich afvragen of er niet meer verantwoorde methoden zijn om statistiek te onderwijzen, en of de wiskundeles op school er niet de aangewezen plaats voor zou zijn.
De belangstelling voor statistiek als schoolvak in de jaren vijftig was door laag-bij-de-gronds utilitarisme bepaald. Met talrijke voorbeelden van dressuur op statistische recepten en veel oncritische toepassing van statistiek voor ogen heb ik me tot nog enkele jaren geleden tegen statistiek op school gekant. In publicaties gaf ik van mijn bezorgdheid blijk dat onderwijs in statistiek op

school alleen maar nog een brok onverteerbare wiskunde aan het programma zou toevoegen. Ik heb inmiddels aan de voorbereiding van statistiek op school mijn medewerking verleend. De ervaringen hierbij opgedaan hebben me optimistischer gestemd, hoewel mijn bezorgdheid nog niet geheel is geweken.
Waarschijnlijkheid en statistiek worden veelal in één adem genoemd. Ik denk, terecht. Onderwijs in mathematische statistiek zonder waarschijnlijkheid zou denkbaar zijn, maar hoe het zou moeten als men meer wil geven dan alleen maar recepten, is nog niet uitgezocht. Onderwijs op deze gebieden valt echter niet met de laag-bij-de-grondse utilitaristische argumenten van de jaren vijftig te motiveren. Een ruimere kijk is vereist, die het hele wiskunde-onderwijs omvat. Ik zie onderwijs in waarschijnlijkheid en statistiek als een middel de leerling met een aan de realiteit georiënteerde toepasbare wiskunde vertrouwd te maken.
Vanuit dit oogpunt komt waarschijnlijkheid en statistiek te laat, als men er pas in de bovenbouw mee begint. Wel, op 't ogenblik schiet er niets anders op over; de bovenbouw is thans in elk geval het enig mogelijke en het aangewezen proefveld voor onderwijs in waarschijnlijkheid en statistiek. Er is nu een aantal jaren in de bovenbouw met dit onderwijs geëxperimenteerd en de leraren is ruimschoots gelegenheid voor heroriëntering geboden. Men heeft zich genoeg inspanningen getroost om — redelijkerwijs — zijn verwachtingen niet beschaamd te zien.

Maar laten we inmiddels verder kijken. Niet vooruit, maar terug — ik bedoel naar de onderbouw en de basisschool. Denkt men aan statistiek niet in platvloers utilaristische termen, maar als een stuk echte, d.w.z. met de realiteit verbonden wiskunde, dan moet men er vroeger en op totaal andere wijze mee beginnen. Het 'oranje boekje', al is het uitgetest, is allesbehalve de laatste didactische wijsheid op dit gebied. En hiermee bedoel ik iets fundamentelers dan dat er in details nog het een of ander in veranderd zou kunnen worden. Het boek is geschreven voor leraren en leerlingen die gewend zijn met elkaar te converseren in een wiskunde en op een wijze, zoals die door de tegenwoordige literatuur voor de onderbouw wordt gerepresenteerd en die weinig ruimte laat voor werkmethoden die aan de realiteit zijn georiënteerd. Het kan ook nauwelijks anders. Pogingen iets anders te ontwikkelen — op de basisschool, in het l.b.o., in de onderbouw — zijn nog in het prilste begin. Aan waarschijnlijkheid en statistiek wordt bij deze pogingen aandacht geschonken, niet als aan een buitenissigheid, maar als een voor de hand liggend voorbeeld van toepasbare wiskunde — de NOT uitzending 'Kijk op kans' is er een staaltje van. Laten we bij alle aandacht die we thans in de bovenbouw aan waarschijnlijkheid en statistiek moeten besteden, de bredere kijk op een vernieuwde wiskunde van 5 tot 18 niet verwaarlozen.

Het ontwerpen van een vertikale leerstofplanning voor de statistiek

DR. P.M. VAN HIELE

Voorburg

1. De probleemstelling

Het ontwerpen van een vertikale leerstofplanning voor de statistiek is op dit moment een bijna onmogelijke opgaaf. Weliswaar behoeft men zich niet te storen aan de kunstmatige grenzen die getrokken zijn tussen basisschool en voortgezet onderwijs, men behoeft zich niets aan te trekken van bestaande leerplannen, men behoeft zich niet het hoofd te breken over de vraag, hoe men de docenten zal begeleiden om dit onderwijs te kunnen geven, maar er is nog een overvloed van determinerende faktoren waarmee men wel rekening dient te houden.

Een daarvan betreft de doelstellingen van het onderwijs in de statistiek. Men zegt wel, dat de statistiek een van de onderwerpen is waaraan de leerling het nut van de wiskunde kan ervaren. Hierdoor zou de leerstofplanning worden gekoppeld aan de vraag naar het tijdstip waarop de motivatie maximaal is. Ik vrees, dat niemand hierover iets met zekerheid kan zeggen.
Sommige leerlingen zullen een studierichting kiezen waarbij statistiek wordt toegepast. Voor hen gelden andere doelstellingen en de leerstofplanning zal voor hen voor een groot deel worden bepaald door de vraag, welke leerstof men in het ene jaar moet behandelen om een voorbereiding te geven voor wat in een later jaar zal volgen.
Kunnen de hierboven genoemde doelstellingen verenigd worden in één leerstofplanning? In het basisonderwijs zal dit wel moeten, maar dat roept toch wel problemen op. Men kan op de basisschool een zekere tijd nuttig besteden aan het ontwikkelen van het begrip 'kans', maar blijkens de eerstgenoemde doelstelling is het toch de bedoeling, dat er daarna ook gerekend wordt en bij dat rekenen krijgt men vroeg of laat te maken met het verschil in intelligentie van de leerlingen.
Een andere moeilijkheid bij het opstellen van een leerplan is de kwaliteit van de kursus. Wanneer voor gloednieuwe leerstof een kursus wordt opgezet, dan

heeft men meestal al na een half jaar behoefte deze belangrijk te wijzigen; de ontwerpers van de kursus geven meestal ronduit toe, dat de kursus slecht is, er komt dan een nieuwe kursus die een jaar later weer voor 'slecht' wordt uitgekreten, enz. We moeten er dus op rekenen, dat de kursus van straks mogelijkheden zal brengen die de kursus van nu nog niet heeft. We kunnen helaas niet berekenen, hoe groot de verbetering zal zijn.
Ik zal dus in dit artikel niet veel verder kunnen komen dan een analyse van de problemen. Een enkele maal zal ik ook enkele aanbevelingen geven.

2. De intelligentiespreiding van de leerlingen

Er is tegenwoordig een stroming te bespeuren die de intelligentiespreiding van de leerlingen niet zeer belangrijk meer vindt voor het onderwijs. Men beroept er zich dan op, dat men vrijwel iedere leerstof aan vrijwel iedere leerling kan bijbrengen, mits men maar de juiste onderwijsmethode kiest. In zekere zin is dit ook zo: universitaire leerstof van weleer kan tegenwoordig in de tweede klas van het voortgezet onderwijs worden behandeld, het ligt er maar aan, hoe je het brengt. Maar daarin zit nu juist de clou: de kursus is in het begin slecht, omdat de docenten en de auteurs van de kursus de zaak zelf niet goed gesnapt hebben en zij hebben het weer niet goed gesnapt, omdat het hun verkeerd is uitgelegd. Het zou dus wel eens kunnen zijn, dat een belangrijk kenmerk van intelligentie is: het kunnen trekken van juiste konklusies uit gegevens met te weinig, soms veel te weinig informatie. Een kursus wordt beter, naar mate meer noodzakelijke informatie gegeven wordt en hij kan dan gevolgd worden door leerlingen met minder intelligentie. Een vak, zoals natuurkunde, is moeilijk omdat er konklusies gevraagd worden, nadat er zeer onvoldoende informatie gegeven is; meetkunde was vroeger moeilijk, omdat de leerlingen een spel moesten spelen waarvan hun de spelregels niet uitgelegd waren. Moderne wiskunde is veel gemakkelijker, omdat het mogelijk is daarvan de spelregels wel gedeeltelijk uit te leggen.
Het is dus waarschijnlijk, dat grote delen van de statistiek over een aantal jaren — wie zal zeggen hoeveel jaren — toegankelijk zullen zijn voor de meeste leerlingen. Een noodzakelijke voorwaarde is, dat men zich er nu rekenschap van geeft, dat de kursus te weinig informatie geeft en dat men het onderwijs-leerproces nauwlettend volgt om uit te maken, welke informatie men verzuimd heeft te geven.
Op die manier heeft men echter de moeilijkheid van de intelligentiespreiding niet opgeheven, maar verplaatst. Intelligente leerlingen zullen namelijk wel dankbaar zijn, dat hun nu iedere informatie verstrekt wordt die zij nodig hebben, zij zullen echter een groot deel van deze informatie overslaan. Zij hebben deze immers niet nodig en kunnen zich dus de tijd besparen, deze op te nemen. Men zal er dus nu al aan moeten denken, hoe men voor deze leerlingen straks een voortgezette kursus inbouwt, wil men ze straks niet voor een overvloed van ledige uren zetten.

Voor de ter zake kundige waarnemer is het natuurlijk mogelijk uit de klassegesprekken op te maken, waar zijn informatie te kort geschoten is. Daarbij moet er rekening gehouden worden met een sterk verschillend reageren van de leerlingen:

a. De leerlingen die er weinig van begrepen hebben, doen hun mond niet open. Een falend klassegesprek is er dus een bewijs van, dat de leerstofoverdracht zeer onvoldoende was.

b. De middelmatige leerlingen zullen voor een groot deel vragen stellen over leerstof waarover wel informatie gegeven is, maar die voor hen nog niet duidelijk genoeg was.

c. Intelligente leerlingen zullen in het algemeen geen vragen stellen over leerstof waarover geen informatie gegeven is, maar waarvan zij de informatie zelf hebben kunnen aanvullen. Zij zijn dit gewend. In het voortgezet onderwijs is het echter mogelijk deze leerlingen zo te trainen, dat zij zich uiten in de zin van: 'U heeft daar en daar verzuimd te vermelden, dat...'

d. Intelligente leerlingen kunnen ook vragen naar informatie waar de docent en de auteur zelf niet hebben gezien, dat er verschillende mogelijkheden bestaan. Deze leerlingen dragen dus bij tot de verbetering en verdieping van de theorie.

3. Telescoped reteaching

Veel docenten en auteurs denken bij leerstofeenheden aan onderwerpen uit de wiskunde. Voor hen is 'vierkantsvergelijkingen' een leerstofeenheid die begint bij de definitie van vierkantsvergelijking en eindigt bij de 'eigenschappen van de wortels van een vierkantsvergelijking'. Men vergeve mij deze laatste ouderwetse betiteling: deze hoort bij de ouderwetse opvatting van didaktiek.
Men wint enorm veel tijd, indien men ieder jaar veel onderwerpen behandelt, maar met deze onderwerpen stopt, als de leerlingen de stof moeilijk gaan vinden. Op die manier bereikt men, dat de leerlingen al zekere onderdelen van de stof zijn gaan beheersen, dat wil zeggen, bepaalde herleidingen 'automatisch' kunnen uitvoeren en daardoor voldoende kunnen nadenken over de denkstappen van hoger niveau.
Om die reden is het gewenst, dat de leerlingen van het v.w.o. — ook al staat dit niet in het leerplan vermeld — in de derde klas al kennis maken met beschrijvende statistiek (middenwaarden en spreidingsmaten), dat zij daar leren werken met het sigma-teken, dat zij in het vierde leerjaar eenvoudige kansberekeningen leren uitvoeren, dat zij eind derde, begin vierde leerjaar leren werken met permutaties en kombinaties. Als men dan bovendien nog de leerstof van het vijfde en zesde leerjaar in verschillende ronden behandelt, dan behoeft de mathematische statistiek niet veel meer dan een twintig uren in beslag te nemen. Ofschoon de kursus door de leerlingen nog niet geheel is doorgewerkt, wijzen onze ervaringen van de Van A tot Z-methode erop, dat deze verwachting niet ver van de waarheid zal liggen.

4. Wiskunde die voor de statistiek noodzakelijk is

Het is voor jonge leerlingen noodzakelijk, dat het begrip 'kans' aan voor hen zeer konkrete onderwerpen gebonden wordt. Dit komt namelijk de motivatie ten goede. Men mag echter niet verwachten, dat men, door de leerlingen een grote hoeveelheid konkreet materiaal te verschaffen, het totaal aantal uren van de kursus verkleint. Het begrip 'kans' wordt ook in het dagelijks leven gebruikt en door de leerlingen ervaren. Als men op een later tijdstip — ergens in het voortgezet onderwijs — de in het dagelijks leven verkregen kennis gaat inventariseren, aanvullen en verdiepen, dan bereikt men misschien meer in minder tijd. Het is hier net als met zoveel onderwerpen: soms kan men, door zijn tijd af te wachten, met veel minder moeite eenzelfde of zelfs een beter resultaat verkrijgen.
Laten we echter aannemen, dat men ter wille van de motivatie van de wiskunde statistiek in het basisonderwijs gebracht heeft. Dan ontkomt men er niet aan: vroeg of laat moet er wiskunde toegepast worden. Bij kansberekeningen voert dit al gauw tot een moeten rekenen met breuken en dat is een onderwerp, dat de leerlingen niet ligt. Het noodzakelijk zijn voor de statistiek kan een motivatie zijn voor de breuken, maar dan volgen de breuken op de statistiek en dan is het dus niet zo, dat zij in de statistiek toegepast worden. Dit houdt dan weer in, dat een kursus statistiek moet inhouden: het leren hanteren van breuken. Of, een alternatief: men behandelt de statistische problemen zo, dat zij niet met breuken, maar bijvoorbeeld met matrices worden opgelost.
Men ziet hieruit: een planning voor een kursus statistiek is niet mogelijk zonder rekening te houden met de kennis die de leerlingen hebben van voor de statistiek noodzakelijke wiskunde. Wil een leerling, ergens in het voortgezet onderwijs, kunnen werken met uitdrukkingen als $\binom{20}{5}\left(\frac{19}{20}\right)^5\left(\frac{1}{20}\right)^{15}$ dan moet hij hebben leren werken met machten en met machten van breuken. Wil men de behandeling van de leerstof vervroegen tot een tijdstip waarop deze kennis nog niet aanwezig is, dan moet men de leerstof op een andere wijze benaderen, bijvoorbeeld door het verstrekken van tabellen. Men zal zich dan weer terdege moeten bezinnen op de vraag, hoe men deze tabellen introduceert; de nieuwe wijze van introductie maakt het immers waarschijnlijk, dat men te weinig informatie verschaft.
Hetzelfde geldt voor de steekproef: men kan met tabellen laten werken zonder veel van de wiskundige achtergrond die tot die tabellen voert, te behandelen. Men moet er echter rekening mee houden, dat zelfs een summiere wiskundige toelichting bij de tabellen nog vrij veel informatie verschaft over de gebruiksmogelijkheden van de tabellen. De vraag, wat meer effekt sorteert: het vervroegen van het noodzakelijke wiskundige apparaat, of het vervroegen van de statistische begrippen, is niet eenvoudig op te lossen.

5. Het aantal benodigde lesuren

Het hier volgende schema geeft slechts een ruwe schatting. Ik beperk mij daarbij tot het voortgezet onderwijs. Ik heb geen ervaring met het basisonderwijs en ik weet ook niet, of het aantal aan statistiek bestede lesuren in het basisonderwijs van veel belang is.

Beschrijvende statistiek in het derde leerjaar		12 lesuren
Kombinaties en permutaties	idem	4 lesuren
Kansberekening vierde leerjaar		4 lesuren
Kansberekening vijfde leerjaar		4 lesuren
Verwachting, standaarddeviatie	zesde leerjaar	8 lesuren
Kansverdelingen	zesde leerjaar	10 lesuren
		42 lesuren

6. Konklusie

1. Bij het opstellen van een leerstofplanning van de statistiek moet men rekening houden met de intelligentieverschillen van de leerlingen.
2. Het introduceren van kansexperimenten en kansbegrippen in het basisonderwijs draagt weinig bij tot het verkleinen van het totaal aantal lesuren nodig voor statistiek in het voortgezet onderwijs.
3. Bij het introduceren van kansexperimenten en kansbegrippen in het basisonderwijs moet men dus nagaan, of de motivatie voor de wiskunde daardoor inderdaad wordt vergroot.
4. Het opstellen van een leerplan statistiek kan niet geschieden zonder daarbij het totale leerplan wiskunde te betrekken.
5. De 'telescoped reteaching' kan een belangrijke tijdsbesparing opleveren.

Waarom statistiek in het mavo?

E.H. SCHMIDT

Amsterdam

De redactie heeft mij deze vraag voorgelegd omdat ik, in de tijd toen een wiskundeleerplan voor het mavo moest worden ontworpen, de invoering van statistiek sterk heb bevorderd.
Voor mij hebben daarbij gegolden overwegingen ten aanzien van het onderwijs in ruime zin en van het mavo in het bijzonder.
In de Inleiding van de 'Toelichting op het Leerplan Wskunde' (brugklas), april 1968, welke inleiding ik indertijd voor deze uitgave van de CMLW heb mogen schrijven, worden eerst discussies en ontwikkelingen vermeld die aan de leerplanvernieuwing vooraf gingen. Met betrekking tot de uitvoering volgt dan o.m.:
'Willen bovengenoemde doelstellingen gerealiseerd worden, dan zal de motivatie bijzondere aandacht moeten hebben. De door leerlingen dikwijls gestelde vraag: "Waarom moet ik wiskunde leren?" vindt haar oorsprong in het feit dat zij geen verband zien tussen hun toekomst en de wiskunde.'
'Mede daarom dient aanvankelijk niet het formele karakter van de wiskunde op de voorgrond te worden gesteld maar zal in een intuïtieve benadering het creatieve element, het zelf actief met de stof bezig zijn, het kritisch denken, een ruime plaats moeten hebben.'
'Om het verband van de wiskunde met de werkelijkheid te laten zien, dient er naar gestreefd te worden de opgaven, waar dit kan, aan reële problemen te ontlenen. Het mathematiseren, d.w.z. het formuleren van een probleem in wiskundige taal, waarbij ook het lezen en analyseren van een gegeven tekst een belangrijke rol speelt en een beroep wordt gedaan op de natuurlijke intelligentie van de leerlingen, heeft een grotere vormende waarde dan het inoefenen van routinetechnieken. Hiermee wil niet gezegd zijn, dat het verwerven van vaardigheden onbelangrijk zou zijn, maar er is wel een rangorde in waarde. In dit verband kan bijvoorbeeld gedacht worden aan eenvoudige gevallen van lineaire programmering en aan de statistiek.'
Het ging dus om de keuze van leerstof die, ook in het oog van de leerlingen, maatschappelijk waardevol is én die de leerling sterk zou activeren.

Bij mijn overwegingen ben ik ongetwijfeld beïnvloed door het feit dat de leerplancommissie van Wimecos in 1954 invoering van statistiek als leervlak bepleitte en door de hieraan in 1955 gewijde vacantiecursus van het Mathematisch Centrum. Van de realisering in het onderwijs heb ik een en ander gezien bij een bezoek in mei 1966 aan een aantal Schotse scholen waar werd gewerkt met de methode 'Modern Mathematics for Schools'.
Bij besprekingen in de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde bleken de meningen ten aanzien van de invoering van statistiek als leervak verdeeld. Om de medewerking van de commissie te verkrijgen voor invoering in het mavo meende ik mij voorshands tot de beschrijvende statistiek te moeten beperken. Een subcommissie van deskundigen op het gebied van de statistiek achtte invoering van beschrijvende statistiek in het mavo mogelijk en verantwoord. Men zie het 'Rapport over de wenselijkheid en de mogelijkheid van het invoeren van statistiek in het onderwijs voor mavo, havo en vwo' van oktober 1968. Het Interimrapport van mei 1967 sprak in de discussienota mavo ook nog van 'kansexperimenten' (blz. 20). Op blz. 24 lees ik: 'de toepassing op enige kansexperimenten verruimt het toepassingsveld en stimuleert de belangstelling.'
Wat het mavo in het bijzonder betreft: het ulo heeft altijd aandacht gehad voor de maatschappelijke bestemming van zijn leerlingen. Vroeger was het voor velen eindonderwijs met het kantoor als bestemming. Handelskennis was een belangrijk vak; voor het mulo-examen kozen de leerlingen handelskennis òf wiskunde. Ook het wiskundeprogramma zou m.i. een zekere maatschappijbetrokkenheid moeten tonen en ik meende dat de statistiek als toepassing van wiskundige methoden op maatschappelijke verschijnselen hiervoor mogelijkheden zou bieden. Een nevengedachte was dat daarbij enige rekenvaardigheid in een zinvolle samenhang verkregen zou kunnen worden.
In een artikel in 'Euclides', mei 1968, geeft prof. dr. N.G. de Bruijn nog al wat kritiek op de ontworpen leerplannen. Ik citeer (blz. 261):
'Hoewel wij juist in een tijdperk zijn aangekomen waarin de wiskunde grote maatschappelijke betekenis heeft gekregen en getreden is buiten de traditionele toepassingsgebieden, vinden wij dat niet weerspiegeld in de voorgestelde programma's.'
'Eén uitzondering wil ik maken op deze kritiek. De commissie heeft een ernstige poging gedaan om de a.s. volwassen wereldburger in aanraking te brengen met het begrip waarschijnlijkheid en met de statistische denkwereld, hoewel naar mij voorkomt nog lang niet met het gewicht dat deze onderwerpen verdienen.'
Wat dit laatste met betrekking tot het mavo betreft: in de Toelichting van mei 1969 wordt bij het onderwerp Beschrijvende statistiek in het mavo (en in het havo) geen toelichting gegeven. Deze zou later volgen. Het is er echter nog niet van gekomen. Na het opnemen van statistiek in leerplan en examenprogramma heb ik bevorderd dat in het centraal schriftelijk examen ieder jaar enkele opgaven over statistiek voorkomen, zodat het vak niet van de tafel geveegd kan worden. Mijn verwachting was dat cursussen in waarschijnlijk-

heidsrekening en statistiek de leraren én de kennis én de smaak voor het vak zouden bijbrengen. Dan zou een discussie over de inhoud van het programma voor de toekomst op gang kunnen komen.
Bovenstaande overwegingen gelden m.i. niet alleen voor het algemeen voortgezet onderwijs. De invoering van het nieuwe wiskundeleerplan op de mavoscholen trok grote belangstelling in het lager beroepsonderwijs, met name ook in die scholen waar de wiskunde tot dusver alleen uit rekenen bestond. Indien ergens dan zal daar een nauwe aansluiting van het wiskunde-onderwijs bij de leefwereld van de leerlingen geboden zijn. In voordrachten die ik begin 1970 voor leraren van het lbo heb gehouden heb ik daarom opneming van statistiek met kansexperimenten in het leerplan aanbevolen. Het was niet denkbeeldig dat de gehele vernieuwing zou bestaan uit toevoeging van een hoofdstuk over verzamelingen aan de oude leerstof.
Inmiddels komen ook ervaringen beschikbaar met onderwijs in statistiek met kansexperimenten in de basisschool, die belangrijke aanwijzingen zullen kunnen geven voor een mogelijke ontwikkeling in het voortgezet onderwijs.
Ik vind het begrijpelijk wanneer men datgene wat nu in het mavo aan statistiek wordt onderwezen, en dat bepaald wordt door wat op het examen wordt gevraagd, onbevredigend acht. Hoewel uitbreiding en verdieping van de tot nu toe onderwezen beschrijvende statistiek mogelijk zou zijn, vraag ik me af of dit een wezenlijke verbetering zou brengen en of niet eerder gedacht zou moeten worden aan datgene wat het Interimrapport van mei 1967 op blz. 20 vermeldt: 'Kansexperimenten: resultatenverzameling, frekwentie, gebeurtenis, de kans op een gebeurtenis, de empirische wet van de grote aantallen.'

Experimenten ter voorbereiding van de introduktie van de statistiek in de bovenbouw van het v.w.o. en het oranje boek

BERT NIJDAM

Maarssen

De voorgeschiedenis

Hoe de situatie rondom de invoering van de statistiek in het voortgezet onderwijs tot 1971 was, blijkt uit de volgende uiteenzettingen van J.J. Wouters, gehouden op een der heroriënteringscursussen Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek in 1970.

In 1967 bracht een werkgroep, bestaande uit Prof. Dr. J. Hemelrijk, Prof. Dr. J.W. Sieben, Prof. Dr. W.P. van Zwet en Dr. J. Wessels, rapport uit aan de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) met de volgende aanbeveling:
1. neem in MAVO en HAVO beschrijvende statistiek, respectievelijk elementaire statistiek op zonder kansrekening
2. voor VWO: statistiek voortbouwende op kansrekening.

Begin 1968 wordt de subcommissie statistiek gesticht en deze commissie gaat onder leiding van Prof. Dr. H.Th. Runnenburg, hoogleraar in Amsterdam, direkt aan het werk.
Een voorlopig werkschema leidt tot een schets voor een VWO programma, die door de hoogleraren Runnenburg en van Zwet in een syllabus wordt verwerkt. Deze syllabus wordt gebruikt bij de heroriënteringscursus in januari 1969 te Eindhoven. Bij die gelegenheid kwamen de aanwezige docenten tot een aantal wensen die werden geformuleerd in een aantal stellingen. We noemen o.a.:
1. beschrijvende statistiek in de onderbouw, voorbereidend op de behandeling in de bovenbouw
2. de combinatoriek in de onderbouw VWO
3. na intuïtieve inleiding rondom de experimentele wet van de grote aantallen het kansbegrip axiomatisch invoeren.

Ook bleek een grote meerderheid voorstander te zijn van het organiseren van didaktische experimenten in het onderdeel kansrekening en statistiek. Naar aanleiding van deze heroriënteringscursus werd aan de staatssecretaris voor O.

en W. het verzoek gericht om een experiment kansrekening en statistiek te mogen beginnen.

Het eerste experiment kansrekening en statistiek

Tijdens de reeds genoemde lerarencursus te Eindhoven in 1969 konden eventuele vrijwilligers voor deelname aan een experiment zich melden. Vooruit lopende op de beslissing van de staatssecretaris werd gedurende het eerste halfjaar gewerkt aan een leerlingen-syllabus. Bij het vervaardigen van die syllabus werd zoveel mogelijk rekening gehouden met de hierboven genoemde stellingen.
Voor de behandeling werd 1 wekelijks lesuur beschikbaar gesteld alsmede 1 researchuur per week voor iedere deelnemende docent(e) gedurende het voorlaatste en laatste leerjaar, zodat ongeveer 70 lessen in totaal beschikbaar waren voor het onderdeel kansrekening-statistiek.
Hier tegenover zou een verlichting gevonden worden door het laten vervallen van andere delen van de wiskunde.
Verder werd van de zijde van de inspectie gesteld, dat experimenten slechts konden worden toegewezen aan scholen oude-stijl (dus een HBS of een gymnasium oude-stijl).
Hiermee voorkwam men dat een wiskunde-experiment zou worden toegevoegd aan een reeds organisatorisch experimentele structuur.
Op 1 augustus 1969 gingen 7 scholen van start.
Ongeveer eens in de zes weken kwamen de deelnemende docenten in Utrecht met de leden van de subcommissie W & S en vertegenwoordigers van de inspectie bijeen om de gang van zaken te bespreken.
Gedurende het eerste jaar bleek de leerlingentekst niet te voldoen. Een speelser aanpak was noodzakelijk.

Mede om deze reden besloot de CMLW het experiment niet opnieuw van start te laten gaan in de cursus 1970-1971. Het lopende experiment werd voltooid op basis van een versmald programma.
Aldus naar de voordracht van Wouters.

Het hernieuwde experiment

Na het uitstellen van de voortgang van het experiment deden zich intussen een aantal gunstige ontwikkelingen voor:
— Door de instelling van het IOWO in augustus 1971 kon de organisatie op een meer professionele manier worden verricht. De schrijver dezes kreeg als taak in overleg met de subcommissie W & S en de inspectie een nieuw experiment voor te bereiden, dat in augustus 1972 van start moest gaan.
— Door het IOWO werd een ontwikkelteam voor de heroriëntering van het

onderwijs in de statistiek (OTHOS) in het leven geroepen, waarvoor 5 leraren met ervaring in het statistiek-onderwijs ofwel met een statistische opleiding werden gezocht. Zij werden gevonden in J. van Daal, A.D. Nijdam, J.J. Sloff, J.J. Wouters en G. Zwaneveld.

— T.b.v. de leraren werden nieuwe cursussen W & S georganiseerd. Voor de vorming van docenten van deze nieuwe cursussen zou door Prof. Dr. G.J. Leppink, die inmiddels tot de subcommissie W & S was toegetreden, een kadercursus worden gegeven.

— De nieuwe experimenten kunnen worden gehouden met leerlingen, die in de onderbouw les gehad hebben in de moderne wiskunde. Hierdoor verkeren deze leerlingen in een betere beginsituatie dan hun voorgangers, die de oude wiskunde kregen.

Door J.J. Wouters werd een nieuwe voorlopige leerlingentekst geschreven, die door het OTHOS voorzien werd van commentaar om zodoende tot een definitieve versie voor het a.s. experiment te komen.
Toen de subcommissie W & S hiertegen in januari 1972 naast veel detailkritiek als bezwaar uitte, dat er te veel gefilosofeerd werd over het kansbegrip, bood Prof. H. Freudenthal aan in overleg met Wouters en Nijdam de tekst te bewerken. Bovendien zou hij trachten statistisch getinte voorbeelden in de kansrekening te verwerken.
Hieruit is het paarse experimentele leerboek 'Waarschijnlijkheid en Statistiek voor het VWO' ontstaan.
In september 1972 gingen 25 docenten, verbonden aan 11 VWO-scholen met dit boek van start met hun groepen leerlingen voor het vak wiskunde I.
Als doelstellingen werden geformuleerd:

a. Het testen van de ontvankelijkheid bij de leerlingen van de aangeboden stof
b. het testen van de bruikbaarheid van de leerlingentekst
c. Het bepalen van de juiste omvang van de leerstof W & S.

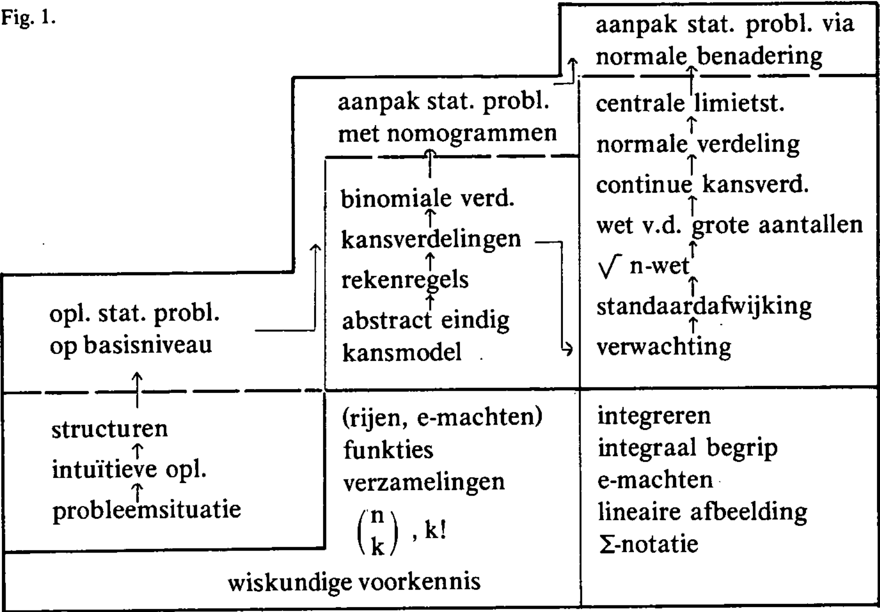
Voor de evaluatie van de lessen werd aanvankelijk per les en later per onderdeel van een hoofdstuk verslag uitgebracht van de opgedane ervaringen. Tevens werden centrale bijeenkomsten gehouden met alle experimenterende docenten, het OTHOS en de subcommissie W & S. De leraren werden ter ondersteuning van hun lessen voorzien van de SMP[1]-uitgave over de W & S, van 'Kanttekeningen bij W & S voor de VWO', van transparanten bij de leerlingentekst en ander demonstratiemateriaal. De proefwerken werden ter wederzijdse oriëntatie centraal vermenigvuldigd en verzonden aan alle medewerkenden aan het experiment. Na één jaar experimenteren met dit VWO-boek werden na behandeling van de eerste vijf van de acht hoofdstukken (in ± 35 lesuren) o.a. de volgende conclusies getrokken:

a. De tekst is te compact geschreven; zij is niet geschikt voor zelfstudie voor de leerling; wel voor de leraar.
b. De totale hoeveelheid leerstof is te groot voor een behandeling in de hiervoor bestemde ± 45 lesuren; door de opzet van het boek dreigt de statistiek buiten behandeling te vallen.

In het OTHOS was intussen de gedachte over een nieuw leermiddelenpakket gerijpt. Het plan tot uitgave van een serie 'werkkaarten statistiek' i.p.v. een nieuw boek werd vooralsnog verworpen. Daarop is in de periode mei-augustus 1973 een nieuwe tekst 'Statistiek en kansrekening voor het v.w.o.' (in een oranje band) vervaardigd.
Inhoudelijk is hierin overeenkomstig het rapport nr. 5 van de CMLW als doel gesteld: de behandeling van de statistische onderwerpen *toetsen en betrouwbaarheidsintervallen,* voortbouwend op kansrekening. Er is echter een geheel andere didactiek gevolgd dan in de vorige teksten. De leerling of student wordt direct geplaatst in het probleemgebied. Hij moet zich het probleem dan eigen maken. Bij voorkeur moet het probleem zo worden aangeboden dat het een echt probleem voor de leerling is, dat het zijn probleem is. Dan volgt de meest primitieve aanpak van het probleem; het wordt intuïtief, zonder speciaal hiervoor aangeleerde hulpmiddelen 'opgelost'. De leerling krijgt enig idee van de oplossing. Door het geven van een vage oplossing wordt de behoefte geschapen tot nadere (wiskundige) analyse van het probleem. Dit leidt tot de ontdekking van zekere structuren en vervolgens tot meer bevredigende of betere of fraaiere oplossingen.
Bovenstaande didactiek past juist zo goed bij de statistiek, omdat in dit vak de schakel werkelijkheid-wiskunde essentieel is. Statistische problemen zijn werkelijke problemen, die men opvangt in de netten der wiskunde.

In het boek worden de statistische onderwerpen in drie fasen behandeld:
fase 1: (hoofdstuk 1). De leerling maakt kennis met het probleemgebied. De benadering van de problemen berust op intuïtie en logisch denken. Voorkennis is niet nodig.
fase 2: (hoofdstuk 2, 3, 4). De in hoofdstuk 1 opgedane ervaringen worden geabstraheerd tot een algemeen axiomatisch kansmodel voor eindige kansruimten. De hiervóór reeds impliciet gebruikte begrippen en kansregels worden hier expliciet geformuleerd. Veel aandacht wordt geschonken aan de binomiale kansverdeling, omdat de aanpak van de centrale ontwerpen in eerste instantie hierop steunt (hoofdstuk 4).
fase 3: (hoofdstuk 5, 6). Als afronding volgt een stuk theorie over de verwachting en standaard afwijking van stochasten, die enerzijds uitmondt in de fundamentele wet van de grote aantallen en anderzijds het gereedschap geeft om de centrale limietstelling te begrijpen en toe te passen op de geformuleerde statistische problemen. Dit laatste geval, waarin het continue kansmodel, de normale verdeling, wordt gehanteerd, is een aanpak op hoog niveau (voor onze leerlingen misschien wel te hoog).
We geven de fasering nog even schematisch weer. Ook de benodigde wiskundige voorkennis nemen we hierin op.

Fig. 1.



De fasen 2 en 3 omvatten een behoorlijk stuk theorie. Over de daarin aangeboden stof bestaat veel litteratuur, waarin u zich rijkelijk te buiten kunt gaan. De aanpak in *hoofdstuk 1* daarentegen is vrij uniek voor het vwo.. We zullen daarom dit hoofdstuk *nader* gaan *analyseren.*

In paragraaf 1 wordt de leerling geconfronteerd met een werkelijk probleem dat voor hem volledig ongrijpbaar is. Om toch enig idee van de mogelijkheden te verkrijgen wordt de probleemsituatie nagebootst door middel van een doos met kralen. In deze doos met kralen wordt van de populatie leerlingen alleen een essentiële eigenschap vertegenwoordigd. De kralen onderscheiden zich alleen door hun kleur. De leerlingen natuurlijk door vele eigenschappen, maar het gaat er alleen maar om of een leerling een exacte studie wil gaan volgen of niet. De doos met kralen is een model van de populatie leerlingen. Het model zal een goede overeenkomst moeten vertonen met de werkelijke populatie (de overeenkomst zal wel niet volledig zijn; er zijn bv. ongetwijfeld leerlingen die nog niet weten of ze een exacte studie willen beginnen of niet. Hiermee is in het model geen rekening gehouden).
De steekproef van 20 uit de populatie leerlingen wordt nu nagebootst door met

het steekproefschepje 20 kralen uit de doos te scheppen. Door vele steekproeven uit twee dozen kralen van verschillende samenstelling te scheppen ervaren de leerlingen dat er toeval in het spel is en ook dat er enige wetmatigheid in de resultaten te bespeuren is. Zij worden geprikkeld om hier meer kijk op te krijgen, om de wetmatigheid in mathematische termen te beschrijven. Deze wens kan vanwege de omvang bij de steekproef van 20 uit een grote populatie niet in vervulling gaan, zelfs ook nog niet als een model in de vorm van een steekproef met teruglegging wordt geïntroduceerd. Daarom worden kleine steekproeven beschouwd in het bijzonder een steekproef van 1. Het bij de grote steekproef reeds binnengeslopen kwalitatieve kansbegrip kan nu mathematisch gekwantificeerd worden. Op deze manier worden van steekproefjes uit kleine populaties kansmodellen geschapen (1.4 en 1.5). De wiskundige verhandeling geschiedt op eenvoudige wijze. Er wordt voortdurend gebruik gemaakt van inzichtelijke diagrammen zoals het kansendiagram.
Op het eind van hoofdstuk 1 (1.7) wordt het oorspronkelijke probleem weer aangevat. De benadering met het kansendiagram gaat nu over in een meer abstrakte behandeling. Langs wiskundige weg is een antwoord gevonden op het oorspronkelijke reële probleem: het vinden van een beslissingsregel om door middel van een steekproef één van twee verschillende onzekere beweringen de juiste te noemen.

Het simuleren van het probleem dat hier aan een wiskundige aanpak vooraf ging is een oplossingsstrategie die vooral in de economie veel opgang maakt. De problematiek is daar vaak zo ingewikkeld, dat er nog geen wiskundige benadering voor te vinden is of zo hij er wel is, vreselijk ingewikkeld en onhanteerbaar.
Het probleem dat de leerlingen voorgeschoteld krijgen is voor hen op dat moment evenmin met hun beschikbare wiskundekennis op te lossen.

De oplossing met kansendiagrammen wordt in dit boek slechts in hoofdstuk 1 en dan alleen voor eenvoudige berekeningen uitgevoerd. Prof. dr. A. Engel uit Stuttgart stelt deze benaderingswijze als zeer geschikt voor leerlingen van 14-16 jaar. Hij leert zijn studenten van de Pedagogische Hochschule elk probleem te vertalen in een vaasmodel en laat daarbij een diagram tekenen. De moeilijkheid is dan alleen het vinden van het vaasmodel. Is dit eenmaal gebeurd, dan kunnen ze via het diagram de kansen eenvoudig bepalen. Beschouw nl. alle wegen die tot een te beschouwen gebeurtenis leiden. Dan is:
1. de kans op zo'n weg is het produkt van de er langsstaande kansen, en
2. de kans op de gebeurtenis is de som van de kansen op die wegen.

Ditzelfde principe wordt in het oranje boek op blz. 21 gevolgd. Een bezwaar bij Engel is dat veel voorbeelden erg gezocht zijn. Hij weet zijn leerlingen echter zeer te boeien door hen in kansspelen te betrekken. Als *voorbeeld* het volgende probleem:

We stellen het gehele mathematiseringsproces van het boek schematisch voor:

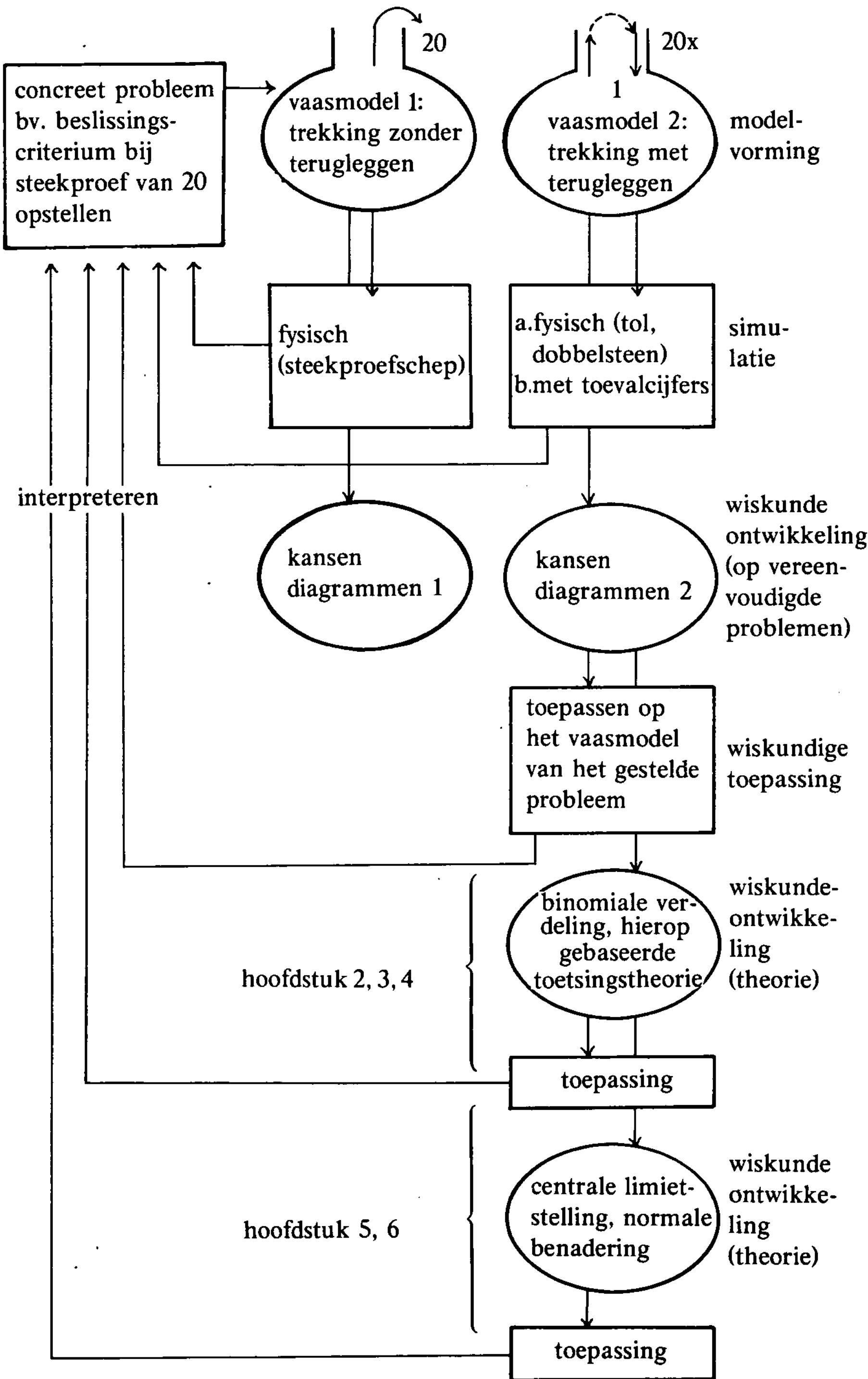


Fig. 2.

Om z'n zakgeld te verdienen moet Jantje 3 maal een spelletje schaak spelen tegen z'n ouders en hiervan twee partijen achter elkaar winnen. Hij mag kiezen: hij speelt de 1e en 3e keer tegen z'n vader en de 2e keer tegen z'n moeder, of de 1e en 3e keer tegen z'n moeder en de 2e keer tegen z'n vader. Nu weet hij uit ervaring dat hij tegen z'n moeder de grootste winstkans heeft.
In welke volgorde moet hij tegen z'n ouders spelen om zoveel mogelijk kans op z'n zakgeld te hebben?

Oplossing:
Stel de winstkans tegen z'n vader is v, die tegen z'n moeder is m. Als hij speelt vader-moeder-vader wint hij bij de volgende wegen:

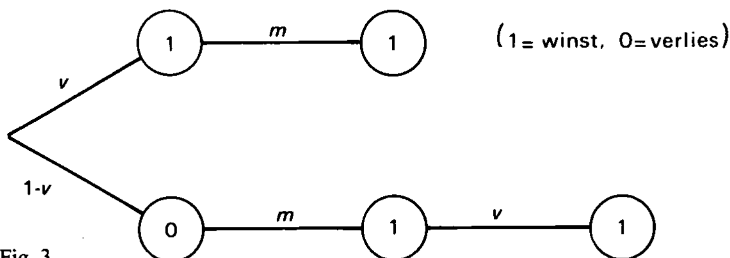


Fig. 3.

Z'n winstkans is $v.m. + (1 - v).m.v. = mv(2 - v)$.
Bij spelen tegen moeder-vader-moeder is z'n winstkans $mv\ (2 - m)$ (symmetrie).
Aangezien $m > v$ is $mv\ (2 - m) < mv\ (2 - v)$, dus moet hij spelen vader-moeder-vader.
Vele leerlingen zouden intuïtief moeder-vader-moeder geantwoord hebben, omdat Jantje dan twee keer tegen de zwakste speelt. Het resultaat is daarom erg verrassend.

Soms zijn kansvraagstukjes m.b.v. kansendiagrammen (grafen) terug te brengen tot stelsels lineaire vergelijkingen.
Bij voorbeeld: Piet heeft 1 gulden, maar heeft om iets te kunnen kopen 6 gulden nodig. Daarom vraagt hij z'n vader om met een munt tegen hem te spelen. Ze zetten een gelijk bedrag in de pot. Piet bepaalt de grootte van de inzet. Bij kruis krijgt Piet de pot, bij munt z'n vader. Piet zet z'n hele kapitaal in, behalve als hij 4 gulden heeft. Dan zet hij 2 gulden in omdat hij bij winst aan z'n 6 gulden komt. Piet en pa stoppen als Piet blut is of z'n 6 gulden binnen heeft. Hoe groot is de kans dat Piet z'n 6 gulden haalt?

Oplossing:

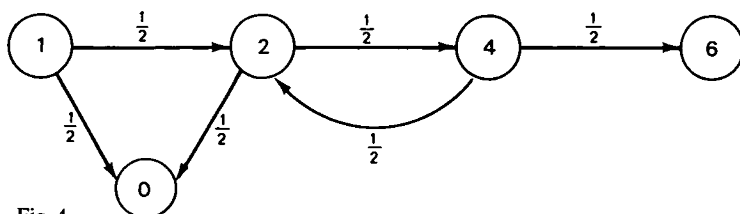


Fig. 4.

De getallen in de cirkeltjes stellen het geld voor dat Piet heeft op een zeker moment. Zij p_i de kans dat Piet in toestand i geraakt, dan is:

$$p_6 = \tfrac{1}{2} \cdot p_4$$
$$p_4 = \tfrac{1}{2} \cdot p_2$$
$$p_2 = \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1}{2}p_4 \quad \} \quad p_2 = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}p_2) \Rightarrow$$
$$p_0 = \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1}{2}p_2 \qquad p_2 = \tfrac{2}{3}$$
$$p_1 = 1 \qquad p_6 = \tfrac{1}{4}p_2 = \tfrac{1}{6}.$$

Ook vragen als hoe lang duurt het spel tussen Piet en z'n vader, kunnen langs deze weg beantwoord worden.
Dit soort uitbreidingen zijn echter bewust buiten het oranje boekje gehouden om direkter op de statistische toepassingen af te gaan. Misschien kunnen dit soort kansproblemen in de toekomst in de onderbouw van het vwo eens aan de orde komen.

We merken nog op dat de knooppunten in een kansendiagram niet altijd dezelfde betekenis hebben. In het eerstgenoemde voorbeeld van Engel staat binnen de cirkeltjes een 0 of 1 en geven de keuzemogelijkheden verlies of winst aan. In het tweede voorbeeld staan in de cirkeltjes toestanden vermeld. In paragraaf 1.4 moet men zich op de knooppunten ook toestanden voorstellen. In paragraaf 1.5 stellen de knooppunten alleen maar een begin of eind van een trekking of keuze voor.
Een weg zelf geeft altijd een keuzemogelijkheid aan.

Tenslotte merken we nog op dat het belangrijke begrip correlatie niet in het oranje boek voorkomt. Dit is desgewenst na paragraaf 5.5 vrij gemakkelijk in te lassen. Er is echter prioriteit gegeven aan de normale benadering bij het toetsen boven nog een ander statistisch begrip.

Dr. Joh. Wansink beantwoordt vragen van leraren (26 februari 1955)

... Er is gezegd dat de statistiek eigenlijk geen wiskunde zou zijn, maar toegepaste wiskunde, en dat we ons tot zuivere wiskunde zouden moeten beperken. De leerlingen zullen dan straks zelf wel in staat blijken tot de voor hen nodige toepassingen van het geleerde. De Commissie heeft echter nadrukkelijk het isolement van de wiskundeleraar, verschanst in de ivoren toren van zijn zuivere wiskunde, willen helpen opheffen. Men spreekt veel over de vormende waarde van de wiskunde. Bedenk echter dat deze waarde het best tot zijn recht kan komen, als de docent er bij zijn onderwijs rekening mee houdt welke structureel verwante gebieden er zijn waar het geleerde toepassingsmogelijkheden zou kunnen vinden. De transfer werkt niet automatisch. Van belang is dat de leraar in zijn onderwijs laat uitkomen welke gebieden van toepassing er zijn, dat hij de belangstelling van de leerlingen voor deze gebieden wekt en zo hun activiteit stimuleert. Het lijkt hem daarom niet juist de permutaties en combinaties en het binomium van Newton uit het programma van de statistiek naar dat van de algebra over te brengen; het hoort thuis in de statistiek, waar het geleerde onmiddellijke toepassingsmogelijkheden heeft en daardoor beter tot zijn recht zal komen. We zoeken naarstig naar toepassingsmogelijkheden van onze zuivere wiskunde. In de statistiek zijn de toepassingen voor ieder zichtbaar aanwezig. Laten we het vak niet versmaden omdat het nuttig is. Laten we het onderwijzen om zijn praktische waarde.

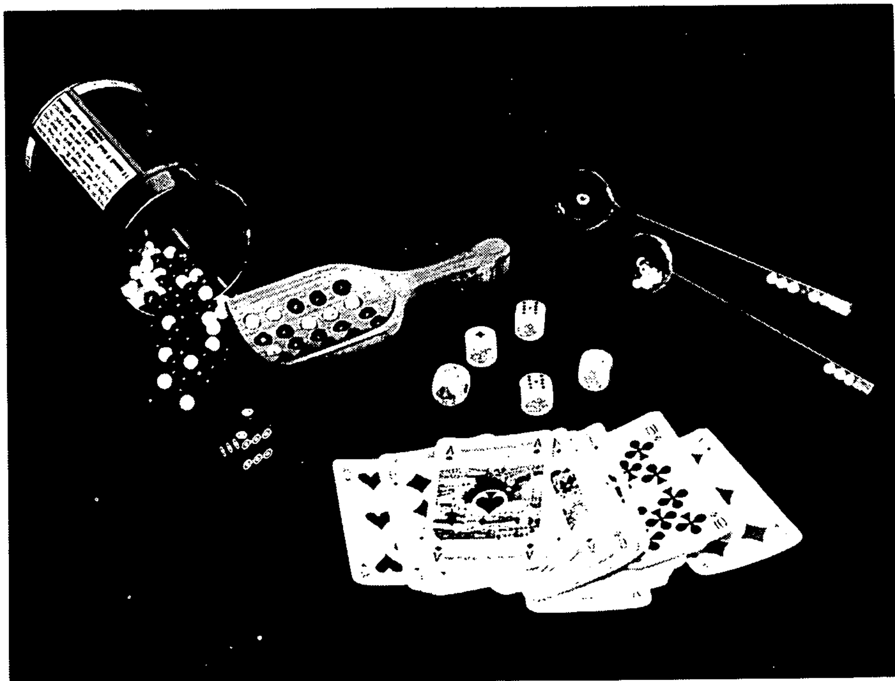
(Euclides, jrg. 30, nummer IV)

Experimenten en materiaal bij het onderwijs in de waarschijnlijkheidsrekening. Enige ervaringen in de klas

J.J. SLOFF

Gasselte

Na een lesje over permutaties vroeg ik aan de leerlingen (11 stuks) op hoeveel verschillende wijzen zij op een rijtje konden gaan staan. Het antwoord volgde direct: 11! Nadat zij evenwwel berekend hadden dat dit ongeveer 40 millioen is, weigerden zij dit antwoord te accepteren. Het was gewoonweg 'onvoorstelbaar'; m.a.w. zij konden het zich niet voorstellen of ze hadden er een verkeerde voorstelling van. Het tekenen van een boomdiagram verduidelijkte na enkele vertakkingen veel.



Een andere ervaring. Bij het werpen van een zuivere munt (wat is dat voor iets?) is de kans op kruis gelijk aan ½. Dat weet iedereen. Vraag nu eens in een eerste les over kansrekening hoe groot bij het werpen met 8 dubbeltjes de kans op precies 4 kruis is. Het antwoord luidt doorgaans: 50%. Doe nu enige worpen met 8 dubbeltjes en men twijfelt al aan die 50%. In de klas laat ik na zo'n inleiding de leerlingen een aantal worpen met 8 munten doen. Bij gebrek aan munten of indien men enige rust verkiest, kan een tafel met toevalsgetallen gebruikt worden. De antwoorden worden op het bord genoteerd in de volgende tabel:

i	u_i = het aantal keren kruis	$\sum_{k=1}^{i} u_k$	$\frac{\sum_{k=1}^{i} u_k}{8i}$
1	3	3	3/8
2	5	8	8/16
	enz.		

De leerlingen maken vervolgens een histogram van de verdeling van het aantal keren kruis en een grafiek van $\frac{\sum_{k=1}^{i} u_k}{8i}$

Door dit experiment krijgen ze een beter inzicht in uitdrukkingen als 'de kans op kruis is gelijk aan ½'. Het mathematisch model van dit experiment is van later orde. De leerling zal wellicht de neiging hebben om te zeggen dat bij een groot aantal worpen de verhouding tussen het aantal keren 'kruis' en het aantal worpen bijna ½ is. Maar wat is 'een groot aantal' en wat wordt bedoeld met 'bijna ½'? (Zie hiervoor de Kanttekeningen bij Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek; de eerste experimentele uitgave van het I.O.W.O. bijgenaamd 'het paarse boekje'.) Bij het werpen met 8 dubbeltjes wordt ook aandacht besteed aan: het 8-keer na elkaar gooien van dezelfde munt; het na elkaar gooien van 8 verschillende munten; het één keer tegelijk gooien van 8 munten.
In het voorgaande diende het experiment om verkeerde ideeën weg te nemen. Nu volgen een paar voorbeelden waarbij de experimenten met concreet materiaal gebruikt worden om een vraagstuk op te lossen.
Een opgave luidt: 'Trek aselect 2 kaarten uit een goed geschud spel van 52 kaarten. Hoe groot is de kans dat deze 2 kaarten van dezelfde kleur zijn?'. Vertel eerst aan de klas wat er met 'spel' en met 'kleur' bedoeld wordt. Er zijn er altijd wel een paar die dit niet weten. Maar nu de oplossing. Tot nu toe kreeg ik geen antwoord, een verkeerd antwoord of een goed antwoord met een verkeerde beredenering. Na zo'n triest resultaat laat ik een leerling demonstreren hoe je aselect 2 kaarten trekt. Dit demonstreren wordt zo geleid dat deze leerling eerst een kaart trekt, naar de kleur van deze kaart kijkt en

dan de tweede kaart trekt. Na zo'n demonstratie geven nagenoeg alle leerlingen het goede antwoord. De gang van zaken in een 4e klas atheneum-A verschilt daarbij niet van die in een 4e klas atheneum-B.
Een andere opgave: Uit een spel van 52 kaarten worden 13 stuks getrokken. Hoe groot is de kans dat er bij dit 13-tal precies 5 hartenkaarten zijn? Het is nu zaak dat men weet hoeveel verschillende 13-tallen met 5 hartenkaarten er mogelijk zijn. Dit leidt tot de vraag: hoe maak je een 13-tal met 5 hartenkaarten? Welnu, neem een kaartspel. Verdeel dit in een hoopje van 13 hartenkaarten en een hoopje van de resterende 39 en het antwoord is snel gevonden.
Volgende opgave: Gooi met 4 dobbelstenen tegelijk. Hoe groot is de kans op de gebeurtenis '4 verschillende aantallen ogen'? Nadat er enige worpen met 4 dobbelstenen gedemonstreerd zijn, wordt het 'tegelijk werpen' vervangen door het 'na elkaar werpen' en kost het weinig moeite de handelingen te vertalen naar een berekening, waarbij door velen opgeschreven werd: $\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6}$

Vragen waarin de uitdrukkingen 'ten minste' of 'ten hoogste' voorkomen, blijken aanzienlijk moeilijker dan bovenstaande opgaven.
Bij het werken in de klas kunnen de leerlingen naar believen over het aanwezige materiaal beschikken. Zowel bij de onderlinge discussies als bij het individueel oplossen van vraagstukken wordt er veel gebruik van gemaakt. Naarmate het onderwijs vordert en de begrippen gevormd zijn, neemt het gebruik van materiaal af. Bij het inleidend onderwijs in de kansrekening zijn boom-, wegen- en kansdiagrammen onontbeerlijk. Men kan zich alleen afvragen of 5 V.W.O. de aangewezen klas is om deze hulpmiddelen te introduceren. Ze worden er in ieder geval wel gebruikt. Door het gebruik van materiaal in het beginstadium blijken de leerlingen beter in staat om een probleem uit de realiteit te vertalen naar een kansmodel; b.v. de kans op een jongens- of meisjesgeboorte te vertalen naar het werpen van een munt en zo weer verder naar een binomiaal kansexperiment. Dit vertalen wordt vaak als zeer moeilijk ervaren en het materiaal is dan een welkom hulpmiddel.
Welk materiaal is er en waar komt het vandaan?
In de handel worden schitterende dozen met materiaal voor de kansrekening en statistiek aangeboden. Wegens het beschikbare budget hebben wij het materiaal zelf samengesteld. We beschikken over: 6 gewone dobbelstenen, 5 pokerstenen, 2 kaartspelen, een soepblik met 10 groene en 4 rode knikkers; een busje met 300 witte en rode kralen en bijpassend steekproefschepje, dat op de handenarbeidles is gemaakt. Verder is er een glazen kolfje met lange hals, afgesloten door een kurk; inhoud 5 gele kralen en 1 rode kraal. De doorsnee van de hals is een fractie groter dan de middellijn van een kraal, zodat deze achter elkaar in de hals kunnen liggen. De plaats van de rode kraal geeft een van de getallen 1 t/m 6 aan. Dit ding noemt men ook wel 'dobbelsteen'. Zo kun je 'dobbelstenen' maken die de cijfers 0 t/m 9 produceren. Met enkele van dergelijke 'dobbelkolven' naast elkaar in een rekje kunnen getallen van 2, 3 of 4 cijfers geproduceerd worden. Het Galton-bord ontbreekt ook niet. De ama-

nuensis heeft het gemaakt. In plaats van met knikkers is het gevuld met hagel. Er wordt een aardige Gausz-kromme geproduceerd, maar als demonstratiemateriaal voor een binomiaal kansexperiment is het ongeschikt. De in de handel aangeboden Galtonborden hebben mij tot nu toe niet kunnen bekoren. Het is ten minste even instruktief de leerlingen over een rooster met behulp van toevalsgetallen een 'wandeling' te laten maken en men bereikt er meer mee. Soms komt er materiaal of een idee uit de lessen in andere vakken (biologie, economie, aardrijkskunde). In de Reflector van november 1973 (uitgeverij Keesing) staat een artikel over statistiek. De Reflector wordt bij aardrijkskunde, bij geschiedenis of bij maatschappijleer behandeld. In de wiskundeles werd dit artikel gebruikt als inleiding op het onderwerp 'steekproeven' en 'toetsen van hypothesen'.
De scores van meerkeuzetoetsen leveren ook aardig materiaal. De beschrijvende statistiek in de 2e klas heb ik hoofdzakelijk behandeld aan de hand van de door de leerlingen zelfgemaakte meerkeuzetoetsen over andere hoofdstukken.
Een slechte ervaring heb ik gehad met het gebruik van de tafel voor de cumulatieve binomiale verdeling. Het werken met de Σ-notatie is nieuw voor de leerlingen. Het berekenen van $B_{n;p}$ $(X < g)$ voor $p > ½$ kostte aanvankelijk veel tijd en inspanning. Een voorbereiding hierop in een lagere klas is wel gewenst.

Een practicum

BERT NIJDAM

Maarssen

Waarom een practicum hypothesetoetsen?

Een doelstelling van het onderwerp waarschijnlijkheidsrekening en statistiek in het v.w.o. is: hypothesetoetsen als toepassing van de waarschijnlijkheidsrekening. Bij een formele behandeling van dit onderdeel van de statistiek zullen vele nieuwe begrippen worden gehanteerd. Ik noem er enkele: hypothese, nulhypothese, alternatieve hypothese, beslissingscriterium, juiste en onjuiste beslissingen, fout van de eerste en tweede soort, betrouwbaarheid, betrouwbaarheidsdrempel, kritiek gebied, onderscheidingsvermogen. Dit geheel moet worden geplaatst in een gedachtenwereld, die anders is dan in de voor de leerling bekende wiskunde. Het is dan ook niet verwonderlijk dat uit de confrontatie van de leerlingen met paragraaf 4.2 uit het oranje boek 'Statistiek en Kansrekening voor het v.w.o.' bleek dat zij zonder voldoende voorbereiding al deze stof niet kunnen verwerken. Deze materie zal de leerlingen geleidelijker moeten worden toegediend. In bovengenoemd oranje boek is daarmee al een begin gemaakt in hoofdstuk 1. Dit echter is nog onvoldoende. Omdat de beste wijze van aanleren *het zelf laten beleven* is, heb ik het nu volgende practicum opgesteld. In dit practicum wordt weinig met namen van begrippen geschermd. Alleen de namen 'fout van de eerste en tweede soort' komen hier om practische redenen voor.

Het practicum is een eerste versie en zal ongetwijfeld voor verbetering vatbaar zijn. Vanwege enkele enthousiaste reacties durf ik van U de moeite te vragen dit practicum door te werken. Hopelijk vindt U het die moeite waard. Het practicum is opgenomen in 'Kanttekeningen bij Statistiek en Kansrekening' dat ook antwoorden, opmerkingen en aanwijzingen voor de leraar bevat.

Practicum

Inleiding hypothese toetsen (voor groepjes van 4 personen)

Bij dit practicum worden 3 gelijke bussen gebruikt. Op de bussen zijn resp. de letters A, B en C geplakt.
Bus A bevat 1 zwarte en 3 witte knikkers,
bus B bevat 2 zwarte en 2 witte knikkers en
bus C bevat 3 zwarte en 1 witte knikker.
De bussen zijn gesloten, maar hebben aan de bovenzijde een doorzichtige knop, waardoor precies 1 knikker tegelijk zichtbaar is.

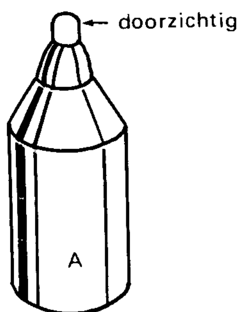


Fig. 1.

Met de bussen kun je bv. het volgende experiment doen. Schud de bus, houd haar op de kop en noteer of de zichtbare knikker zwart of wit is. Herhaal dit procédé totdat je in totaal 10 keer zwart of wit hebt genoteerd. Het aantal keren dat een zwarte knikker te voorschijn komt is een stochast; bij bus A: X_A, bij B: X_B, bij C: X_C.
Tot vraag 13 zetten we bus B nog even weg.

△ 1. Doe het hierboven beschreven experiment 5 keer met bus A en 5 keer met bus C. Verdeel het werk. Noteer hieronder de resultaten.

Uitkomsten bij bus A: ....
Uitkomsten bij bus C: ....

Verklaar de verschillen tussen de uitkomsten bij A en C, en ook de onderlinge verschillen bij A.

△ 2. Hoe is de kansverdeling van X_A en van X_C?
Teken in één figuur de histogrammen van beide verdelingen.

X_A is . . . . .
verdeeld met
$n = \ldots, p = \ldots$

X_C is . . . . .
verdeeld met
$n = \ldots, p = \ldots$

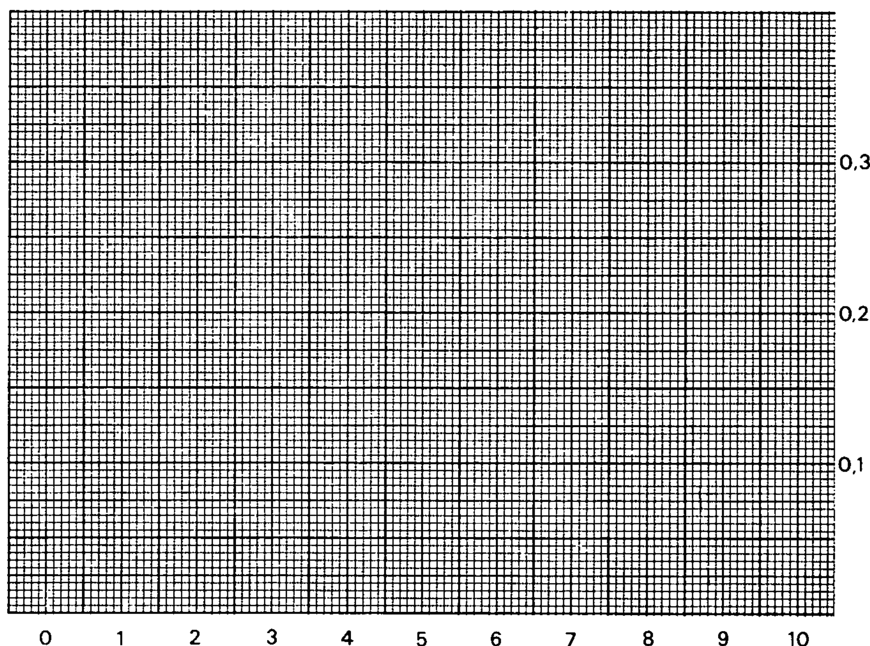


Fig. 2.

Eén van de groep bedekt de letters A en C door elastieken om de bussen te schuiven en geeft de bussen aan de groep terug zodat de overigen in de groep niet weten welke bus A en welke C is. De groep moet nu uitzoeken welke bus A en welke C is, uiteraard zonder de elastieken te verwijderen.

△ 3. Bespreek in de groep een strategie om er achter te komen; voer de proef uit en zie of je gelijk hebt.

We volgen nu een methode, waarbij een steekproef van 10 met één van beide bussen wordt genomen. Komt hierbij minder dan 5 keer zwart voor, dan zeggen we dat de onderzochte bus de A opgeplakt heeft; als er meer dan 5 zwarte in de steekproef voorkomen, de C. Bij precies 5 zwarte is de twijfel over de beslissing het grootst. Laten we het voordeel van de twijfel aan bus A geven. Dus:

Zij X het aantal zwarte knikkers in de steekproef van 10:
bij $X \leqslant 5$ veronderstellen we dat het bus A is,
bij $X > 5$ stellen we het op bus C

Natuurlijk kun je met deze beslissingsprocedure pech hebben.

△ 4. Op welke twee wijzen kun je een verkeerde beslissing doen?

1. Het is bus A, maar ....
2. Het is bus C, maar ....

De eerstgenoemde fout noemen we de fout van de eerste soort, de laatstgenoemde fout de fout van de tweede soort.

De steekproef is een binomiaal kansexperiment met onbekende p ($p = \frac{1}{4}$ of $p = \frac{3}{4}$) en $n = 10$.

△ 5. Hoe groot is de kans op de fout van de 1e soort? (zie vraag 4).

Het is bus A, dus $p =$
$P(X > \ldots.) =$

△ 6. Hoe groot is de kans op de fout van de 2e soort?

Het is bus C, dus $p =$
$P(X \leqslant \ldots..) =$

△ 7. Trek bij de histogrammen van opdracht 2 een dikke vertikale lijn tussen de balken bij $x = 5$ en $x = 6$. Arceer de oppervlakken, die de gevraagde kansen uit de opdrachten 5 en 6 aangeven, verschillend.

△ 8. Hoe groot zijn de kansen op fouten als tot beslissingscriterium wordt genomen:
bij $X \leqslant 4$: bus A; bij $X > 4$: bus B.

1. Het is bus A: $P(X \quad) =$
2. Het is bus C: $P(X \quad) =$

Iemand, die sterk de indruk had, dat hij bus A herkende, legde voor zichzelf het criterium:
bij $X \leqslant 6$: bus A; bij $X > 6$: bus C.

△ 9. Bereken voor hem de kansen op fouten:

1. Het is bus A: $P(X \quad) =$
2. Het is bus C: $P(X \quad) =$

De drie beslissingscriteria hadden alle de vorm:

bij $X \leqslant g$: bus A; bij $X > g$: bus C.

We zetten de kansen op fouten voor de diverse g in schema.
Hierin is $P(X > g \mid p = \frac{1}{4})$ de kans dat bus A foutievelijk voor bus C wordt uitgemaakt. (Lees: kans op $X > g$, gegeven $p = \frac{1}{4}$).

g	Het is A; $P(X > g \mid p = \frac{1}{4})$	Het is C; $P(X \leqslant g \mid p = \frac{3}{4})$
3		
4	0,0781	0,0197
5	0,0197	0,0781
6	0,0035	0,2241
7		

△ 10. Vul dit schema aan voor $g = 3$ en $g = 7$.
Aan welke waarde van g geef je de voorkeur en waarom?

△ 11. Neem 6 keer blindelings een bus en onderzoek d.m.v. een steekproef van 10 of het A is of niet. (Eén tweetal neemt 3 keer één bus, het andere tweetal steeds de andere bus.) Neem als beslissingscriterium:
$X \leqslant 5$ dan A; $X < 5$ dan niet A.

Kontroleer of je gelijk hebt door onder het elastiek te kijken of er een A op staat of niet.

nr.	uitkomst x	beslissing	werkelijkheid	de beslissing was
1	.....	A/C	A/C	juist/onjuist
2	.....	A/C	A/C	juist/onjuist
3	.....	A/C	A/C	juist/onjuist
4	.....	A/C	A/C	juist/onjuist
5	.....	A/C	A/C	juist/onjuist
6	.....	A/C	A/C	juist/onjuist

△ 12. Totaliseer de resultaten van de gehele klas.

.... keer was het A; .... keer werd A beslist, ... keer niet

.... keer was het C; .... keer werd C beslist, ... keer niet

.... keer werd een steekproef gedaan, waarvan

.... keer een onjuiste beslissing is genomen.

We zien dat bij een steekproef van 10 bus A goed te onderscheiden is van bus C.
We gaan nu zien hoe dit met de bussen A en B zit.
Bedek de letters A en B en neem willekeurig één van de bussen. Na een steek-

proef van 10 moet beslist worden of de genomen bus al of niet de letter A heeft. Het criterium hiervoor is
$X \leqslant g$, dan A; $X > g$, dan B.

△ 13. Bereken de kansen op foute beslissingen voor $g = 3,4,5$. Welke waarde van g prefereer je?

g	Het is bus A $P(X > g \mid p = \frac{1}{4})$	Het is bus B $P(X \leqslant g \mid p = \frac{1}{2})$
3		
4		
5		

De beste keuze vind ik $g =$

△ 14. Probeer dit uit door per groep 6 keer willekeurig bus A of B te kiezen en hierop een steekproef van 10 uit te voeren. (Eén tweetal neemt 3 keer één bus, het andere tweetal de andere bus.)

nr.	x	beslissing	het was	de beslissing was
1		A/B	A/B	juist/onjuist
2		A/B	A/B	juist/onjuist
3		A/B	A/B	juist/onjuist
4		A/B	A/B	juist/onjuist
5		A/B	A/B	juist/onjuist
6		A/B	A/B	juist/onjuist

△ 15. Totaliseer de resultaten van de gehele klas.

.... keer was het A, ... keer werd A beslist, ... keer niet

.... keer was het B, ... keer werd B beslist, ... keer niet

Er werden in totaal .... steekproeven genomen;

in .... gevallen viel er een foute beslissing.

Het aantal foute beslissingen is veel groter dan bij het onderscheiden van de bussen A en C. De bussen A en B zijn minder goed van elkaar te onderscheiden dan A en C.

△ 16. Bedek nu bij alle drie bussen de opgeplakte letters. Neem er één uit en toets door middel van een *steekproef van 20* of dit bus A is of niet.

Vul voor het uitvoeren van de steekproef onderstaande tabel in en kies m.b.v. dit schema een criterium. Voer dan de steekproef uit.

g	Het is bus A $P(X > g \mid p = \frac{1}{4})$	Het is bus B $P(X \leqslant g \mid p = \frac{1}{2})$	Het is bus C $p(X \leqslant g \mid p = \frac{3}{4})$
5			
6			
7			
8			
8			
10			
Criterium: bij $X \leqslant \ldots.$: A; bij $X > \ldots.$: niet A.			
Steekproefresultaat $x = \ldots.$ beslissing: .... Was een juiste beslissing genomen? Ja/Nee.			

Je krijgt nu een bus met 20 zwarte en witte knikkers. Hiervan zijn er zeker 5 zwart, maar misschien meer. Aan jullie nu de taak om te beslissen of het aantal zwarte nu precies 5 is of dat dit aantal groter dan 5 is. Neem daartoe een steekproef van 20 keer een knikker.

△ 17. Wat voor kansexperiment is deze steekproef als het aantal zwarte knikkers precies 5 is en wat als dit aantal groter is?

> Bij 5: een .... kansexperiment met $n = \ldots.$ en .....
>
> Bij meer dan 5: een .... kansexperiment met $n = \ldots..$ en .....

Door middel van de steekproef toetsen we dus $p = \frac{1}{4}$ tegen $p > \frac{1}{4}$ nl. $p = 0{,}30$ of 0,35 of 0,40 of .....
We moeten een regel opstellen om uit te maken wanneer we $p = \frac{1}{4}$ beslissen of $p > \frac{1}{4}$. Deze zal evenals bij de vorige experimenten luiden:

$X \leqslant g$, dan $p = \frac{1}{4}$; $X > g$, dan $p > \frac{1}{4}$. (X is het aantal zwarte knikkers in de steekproef).
De moeilijkheid is de keuze van g.

△ 18. Waarom is dit moeilijker dan in de vorige experimenten?

In het experiment met de drie bussen A, B en C, waar we toetsten of een willekeurig gekozen bus letter A had, konden we twee soorten fouten maken:
1e Het was A, maar we beslisten niet A; (fout van de 1e soort)
2e Het was A niet, terwijl we wel A beslisten; (fout van de 2e soort)

De kans op een fout van de eerste soort was $P(X > g \mid P = \frac{1}{4})$;
de kans op een fout van de tweede soort was, indien het bus B was:
$P(X \leqslant g \mid p = \frac{1}{2})$, en indien het bus C was: $P(X \leqslant g \mid p = \frac{3}{4})$. Bij bus B, waar de p-waarde het dichtst bij $\frac{1}{4}$ lag, was deze fout van de tweede soort het grootst. Hoe zit het met dit soort fouten in het nu beschouwde experiment? Laten we voor g eens de waarde 7 nemen.

△ 19. Bereken de kans op de fout van de tweede soort indien $p = 0{,}75$, $p = 0{,}50$ en $p = 0{,}30$.

$P(X \leqslant 7 \mid p = 0{,}75) =$
$P(X \leqslant 7 \mid p = 0{,}50) =$
$P(X \leqslant 7 \mid p = 0{,}30) =$

De kans neemt dus toe naarmate p dichter bij $\frac{1}{4}$ ligt.

△ 20. Kun je g zodanig kiezen dat de drie berekende kansen kleiner worden dan bij $g = 7$?

△ 21. Bekijk nu eens welke invloed de keuze van g heeft op de kans op de fout van de eerste soort. Vul daartoe eerst het volgende staatje in:

g	$P(X > g \mid p = \frac{1}{4})$
5	
6	
7	
8	
9	
10	

invloed:

Het kleiner maken van de kans op een fout van de tweede soort impliceert het groter worden van de kans op de fout van de eerste soort. Bij het vaststellen van de kans op een fout van de tweede soort moeten we goed beseffen dat dit een functie van p is ($p > \frac{1}{4}$). Voor elke waarde van p kan die kans berekend worden. Dit doen we echter niet. Integendeel, we laten de fout van de tweede soort voor wat hij is en letten alleen op de fout van de eerste soort. We kiezen g zodanig dat de kans op de fout van de eerste soort, dus $P(X > g \mid p = \frac{1}{4})$ klein is, bijvoorbeeld kleiner dan of gelijk aan 0,1 of 0,05 of 0,01.

△ 22. Welke waarde van g voldoet nog net in deze gevallen?

$P(X > g \mid p = \frac{1}{4}) \leqslant 0{,}1 \Rightarrow g =$
$P(X > g \mid p = \frac{1}{4}) \leqslant 0{,}05 \Rightarrow g =$
$P(X > g \mid p = \frac{1}{4}) \leqslant 0{,}01 \Rightarrow g =$

We nemen voor ons experiment de g zodanig dat de kans op de fout van de eerste soort $\leqslant 0{,}05$ is, n.l. $g = 8$. Dus als $X \leqslant 8$, nemen we aan dat $p = \frac{1}{4}$ waar kan zijn; als $X > 8$, verwerpen we die gedachte.

△ 23. De leraar of iemand uit de groep geeft zijn groep 10 keer een bus met 20 knikkers. Toets in deze 10 gevallen of $p = \frac{1}{4}$, of $p > \frac{1}{4}$. Stel daarna door tellen vast of je beslissing juist was.

	x	beslissing	aantal zwarte knikkers in de bus	de beslissing was
1	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist
2	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist
3	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist
4	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist
5	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist
6	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist
7	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist
8	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist
9	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist
10	.....	p ..... $\frac{1}{4}$	.....	juist/niet juist

△ 24. Totaliseer het resultaat voor de hele klas.

Aantal zwarte knikkers in de bus	Aantal goede beslissingen	Aantal foute beslissingen
5		
6		
8		
10		
15		

Als het aantal zwarte knikkers in de bus 6 is ($p = 0{,}30$) zal in de meeste gevallen zijn beslist $p = \frac{1}{4}$. De kansverdeling by $p = 0{,}30$ ligt ook zo na aan die van p $p = 0{,}25$, dat het zeer wel mogelijk is $p = \frac{1}{4}$ te aanvaarden, terwijl in werkelijkheid $p = 0{,}30$ is.
Een sterk afwijkende waarde van $p = \frac{1}{4}$, bijvoorbeeld $p = \frac{3}{4}$ (bij 15 zwarte knikkers) wordt meestal goed onderscheiden van $p = \frac{1}{4}$.

Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek in het basisonderwijs

FRED GOFFREE

Den Dolder

1. Inleiding

In het voorjaar van 1972 zond de N.O.T. (Nederlandse Onderwijs Televisie) het eerste nederlandse wiskunde programma voor 5e en 6e klassen van het basisonderwijs uit: Kijk op Kans*
Het pakket werd ontwikkeld door het I.O.W.O. en in basisscholen uitgeprobeerd door enkele medewerkers.
De ervaringen, opgedaan met leerlingen en onderwijzers zijn gebruikt om het onderwijs in dit vakgebied te beschrijven. Voordat we hiertoe overgaan moeten we stellen dat het gebied van de Statistiek & Waarschijnlijkheidsrekening in de eerste plaats werd gekozen om de rijke mogelijkheden voor goed wiskundeonderwijs op dit nivo. Wij zijn van mening dat het wiskundeonderwijs voor 4 tot 11 jarigen zich in het bijzonder dient af te spelen in het gebied waar de werkelijkheid met wiskundige middelen transparant gemaakt kan worden.

2. We maken er een probleem van

Als op de gymles twee partijen moeten worden samengesteld, laat de leraar dit meestal door twee jongens doen. Ze gaan dan eerst met z'n tweeën 'opraaien'. Wie wint, heeft de eerste keus. Vandaag mochten Gerrie en Johan beginnen. Johan, met maat 42 notabene, won glansrijk van Gerrie, die een heel klein maatje bleek te hebben. De kinderen hebben, met de leraar, hartelijk gelachen om het grote verschil. En in de kleedkamer zijn er achteraf heel wat grapjes over gemaakt. Het begon erop te lijken dat jongens van 11 jaar met maat 42 eigenlijk een heel grote uitzondering zijn.

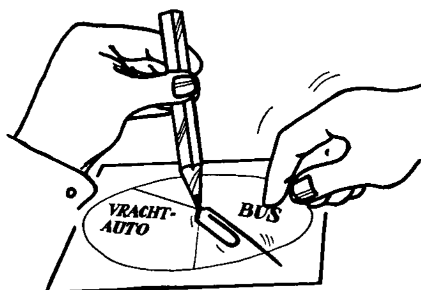
* Door Teleac en NOT zullen tussen Pasen en Pinksteren 1974 weer uitzendingen worden gewijd aan het onderwerp *Kijk op kans.* Bij deze uitzendingen zal een boekje voor ouders uitgegeven worden.

Terug in de klas heeft de onderwijzer dit probleem nog eens angesneden: *Is het wel zo uitzonderlijk dat een jongen van 11 schoenmaat 42 heeft?*
Om antwoord te geven op een dergelijke vraag zou je eerst moeten weten welke maten zesde klassers dan zoal hebben. En hoe meer jongens je kunt ondervragen, des te duidelijker kan je antwoord zijn.
Dan begin je met de eigen school. Alle jongens van de zesde klas moeten hun schoenmaat opgeven.
De meester heeft inmiddels bedacht dat bij de meisjes van de zesde klas wel eens 'een uitschieter naar beneden' zou kunnen voorkomen. Die zijn nu dus ook met een onderzoek bezig.
De resultaten van beide groepen worden in een histogram verwerkt. Nu kan iedereen het zien: er is een grote 'middengroep', er zijn een paar kleine maatjes en inderdaad, Johan leeft geheel alleen 'op grote voet'. De vraag naar percentages levert de eerste echte moeilijkheden. Toch is men het er na veel rekenwerk over eens dat deze percentages slechts beperkt geldig zijn. En het erop gebaseerde sektordiagram geeft dan ook alleen maar beeld van de situatie op deze school.
Het kan best toevallig alleen op onze school zo zijn, twijfelen onderwijzer en leerlingen . . .

* * *

Ineke en Frits zijn in de zomervakantie met vader en moeder naar Zuid-Frankrijk geweest. De autotocht is altijd een lange, vervelende rit. Maar dit keer hadden ze een groot deel van de tijd kunnen doden met een leuk telspelletje. Elk koos een bepaald automerk en wie de meeste auto's zag, had gewonnen.
Zou het zuiver geluk geweest zijn dat Ineke met haar keuze van 'lelijke eend' vaker won dan Frits, die de tegemoetkomende 'kevers' mocht turven?
De onderwijzer legt deze vraag aan het eind van zijn inleiding weifelend aan de leerlingen voor.
Wat bedoel je eigenlijk met 'zuiver geluk'?
Soms zegt men ook wel 'louter toeval' of 'dat is wel erg toevallig'.
Men is het er over eens dat toeval iets is, waar mensen geen vat op kunnen krijgen. Een feit is dat toevalligheden vaak de nieuwsgierigheid wekken. Vooral een toevallige samenloop van omstandigheden levert gesprekstof en 'haalt soms de krant'. Ook lijkt het erop dat mensen af en toe onbegrepen (onbekende) oorzaken aan het toeval toeschrijven. Met de mededeling 'Het was echt toeval dat ik die ruit ingooide' maakt de ondeugende Maarten hiervan intuïtief gebruik.
De onderwijzer weet hier nog aan toe te voegen dat bij het verzekeren van scheepsladingen onwetendheid (je bent niet op de hoogte met de toestand van het schip op dit moment) gelijk werd geschakeld met *toeval* (je kunt nu nog een verzekering afsluiten, al bestaat de kans dat het schip reeds vergaan is).
Had Ineke nu 'zuiver geluk' toen ze won met haar 'lelijke eenden'? Of zou van te voren haar kans al bekend geweest kunnen zijn? De onderwijzer stelt zijn leerlingen in de gelegenheid om over deze zaken na te denken aan de hand van

een konkrete opdracht: Volgend jaar gaan de ouders van Ineke weer naar dezelfde camping in Zuid-Frankrijk. Natuurlijk gaan Ineke en Frits dan weer het verkeerstelspel doen. Maar, stel eens, nu met bussen en vrachtauto's. Welke van de twee zou je nu moeten kiezen. En omdat Ineke nu zo graag haar kleine broertje Frits wil laten winnen, moet ze zelf 'de kleinste kansen' hebben.
Op de vraag hoe dat 'zit' met bussen en vrachtauto's op de franse wegen, kan de onderwijzer een tabel met gegevens aanbieden. De verdeling van de kansen in het hierop gebaseerde sektordiagram is ondubbelzinnig te zien. Maar . . . je weet nooit hoe een spelletje (totaal 20 voertuigen tellen) afloopt. *Toevallig . . .*
Ineke wil het spel wel vast uitproberen en de onderwijzer draagt hiervoor een briljant idee aan.
Het sektordiagram, als vertegenwoordiger van de werkelijke kansverdeling, wordt basis van een rad van avontuur, waarmee het toeval eraan toegevoegd is. De kinderen in de klas spelen het 'verkeersspel' met hun zelfgemaakte tollen alsof ze echt op weg waren naar de Middellandse Zee. *In de gesprekken klinkt het woord kans meer dan eens door . . .*



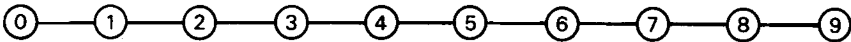
Over kansen gesproken. De aanleiding tot alle voorgaande overpeinzingen lag in de gym-les, waarbij twee partijen moesten worden gekozen. Johan (maat 42) en Gerrie (kleine maat) mochten opraaien. Johan won dit met glans, maar was het eigenlijk wel eerlijk?
De twijfel, die van aanvang af bij enkele leerlingen reeds bestond, komt met deze vraag opnieuw naar voren. Voor goed begrip worden de spelregels eerst nog eens duidelijk vastgesteld:
— men begint op een grote afstand van elkaar (onbekendheid-toeval)
— beiden zetten alleen hele voeten (geen behendigheid)
— bruggetje wint, d.w.z. dat degene die met zijn voet de laatste stap doet en daarmee de ander bereikt, winnaar is.

Heb je nu alleen maar 'geluk' als je wint?
Is het zuiver toeval? Hebben beide jongens evenveel kansen?
Het lijkt erop dat 't eerlijk is, maar het feit van de ongelijke schoenmaten laat intuïtief nog twijfel bestaan.
De onderwijzer behandelt 'deze som' niet uitputtend. Hij is ervan overtuigd dat sommige kinderen er wel op door zullen gaan. Daarom gaat hij met de klas op oriëntatietocht door het land van de aftelversjes en -spelletjes.
De intuïtieve lading van het begrip 'eerlijk aftelversje' krijgt een eerste doordenking. De begrippen toeval en kans worden gebruikt om het 'eerlijk-zijn' nader te verklaren.
— Iet wiet waait is eerlijk weg — Dat is niet eerlijk, want je kunt uitrekenen waar je moet beginnen om zelf niet over te blijven. En dan is het niet toevallig meer en heb je zelf de meeste kans . . . Je kunt nu ook uitleggen waarom men die hele lange aftelversjes heeft gemaakt. Behalve het plezier dat je daaraan beleeft, zijn ze ook nog eerlijker: ze zijn zo lang dat het toeval er daarmee ingebakken is.
Kennen jullie 'een, twee, drie . . . plof'?
Je speelt het met z'n drieën. Elk de rechterhand op de rug. 'Een, twee, drie . . .'. Iedere speler steekt snel zijn hand naar voren: of de binnenkant naar beneden of de binnenkant naar boven.
Als alle drie spelers de handen op gelijke wijze uitsteken, wordt er overgespeeld. In het andere geval wordt de winnaar aangewezen door de uitgestoken hand, die van de anderen verschilt. Zou dat eerlijk zijn?
Natuurlijk zijn er kinderen die onmiddellijk een slim plannetje klaar hebben. 'Als je met je vriendje afspreekt om . . .' Oneerlijk spelen wordt onderscheiden van een oneerlijk spel. De klas berust in deze verschraling van hun werkelijkheid. Het 'ploffen' lijkt, op intuïtieve gronden, een eerlijke zaak. Maar men is voorzichtig geworden. Kunnen we het niet een paar keer spelen om wat zekerheid te krijgen?
De klas ploft bijna uit elkaar. Maar na al het gekrakeel staat er toch een grafiek op het bord, waaruit een voorzichtige konklusie getrokken kan worden. *Het is overigens niet ondenkbaar dat het toeval ons weer parten heeft gespeeld.* Het feit dat met alle leerlingen tezamen heel wat spelletjes gespeeld zijn, is een geruststellende gedachte.

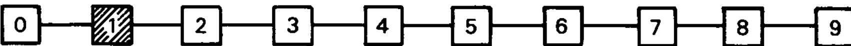
* * *

Stel je voor dat je met z'n zessen op ons schoolplein staat, en je wilt verstoppertje spelen. Wie moet 'm dan zijn?
Zou je dan het volgende aftelspelletje willen doen?
Ieder bedenkt een getal onder de 10. Dan kijk je naar de volgende auto, die langs komt. Het eerste cijfer van het kentekennummer wijst degene aan, die 'm moet zijn.
Natuurlijk moet je net zolang wachten tot er één van de gekozen cijfers bij is. En als er twee hetzelfde getal hadden, dan doen die 't nog eens samen over.
Geen probleem. Het is niet zo erg leuk, maar wel eerlijk. Je weet nooit welk kentekennummer straks voorbij komt en alle cijfers hebben evenveel kans!

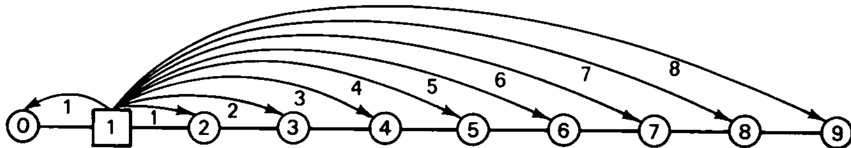
Je kunt het alleen betreuren dat het spel met de komst van één auto niet beslist hoeft te zijn. 'Als we nu eens de afspraak maken dat degene, die er het dichtste bij is, hem moet zijn', fantaseert de onderwijzer.
Op het eerste gezicht lijkt het een goede suggestie. Bij elke auto kun je gaan rekenen en er zullen hoogstens nog een paar gelijk eindigen.
Een andere vraag dringt zich echter op.
Is dit spel nog even eerlijk als het voorgaande?
Het toeval is aanwezig, dat is duidelijk. Hoe zit dat evenwel met de verdeling van de kansen?
Een van de kinderen brengt de onderwijzer opnieuw aan het twijfelen:
Als ik 9 kies, dan heb ik meer kans dan iemand die bijvoorbeeld 5 kiest. Met 5 zit je naar twee kanten dicht bij veel andere getallen en met 9 is dat maar aan één kant . . .
De klas wil deze redenering wel aanvaarden en men is bereid om haar op juistheid te toetsen. Met een sektordiagram (10 gelijke sektoren) als rad van avontuur worden dan de langskomende auto's gesimuleerd. Iedere leerling neemt een cijfer om te gokken. Twee leerlingen kiezen konsekwent de 9 en de 5 . . .
De onderwijzer, toch wel onder de indruk van het feit dat zijn intuïtie door een kinderlijke redenering en een empirische toetsing daarvan een gevoelige deuk heeft opgelopen, tracht nu een eigen redenering te vinden. Met rekenen moet je er toch ook achter kunnen komen . . .



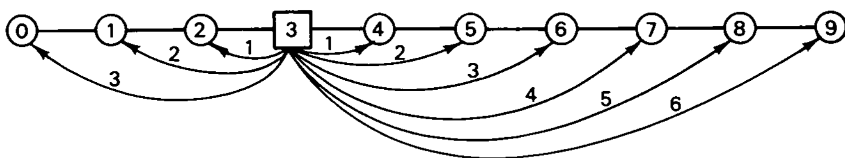
Dit zijn alle mogelijke cijfers, die als eerste van het kentekennummer kunnen optreden. Elk komt met even grote waarschijnlijkheid voor, dat kun je wel aannemen.



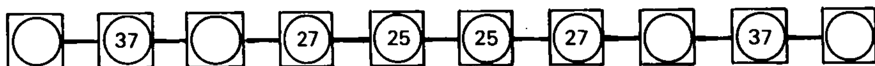
Dezelfde verzameling cijfers staat ter beschikking van de spelers om uit te kiezen.
Stel nu dat je het getal 1 hebt gekozen. Je weet nog niet welk cijfer uitkomt. Wat kun je dan zeggen over de afstand tot deze nog onbekende uitkomst?



Alle mogelijke afstanden zijn samen 1 + 1 + 2 + . . . + 8 = 37. Hoe zou dat zitten voor de keuze [3]?



Samen 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 27
Met de keuze van [3] is deze 'totaal-afstand' inmiddels met 10 minder geworden. Het kan interessant zijn om de totalen voor alle keuze getallen te berekenen. Als je daarbij de symmetrie opmerkt, dan behoef je slechts het halve rekenwerk te verrichten.



De onderwijzer die inziet dat deze getallen de verwachting van de afstand en de intuïtie een zijner leerlingen kwantificeren, besluit bij volgende problemen uiterste voorzichtigheid te betrachten.
Het eerste wat hij doet is voor zichzelf het probleem van Johan (maat 42!) en Gerrie op te lossen. De meetkunde en het algemeen bruikbare didaktische principe van de overdrijving (Johan maat 100 en Gerrie maat 1) bewijzen hem hierbij goede diensten.
Wat moet hij evenwel aanvangen met het aftelspelletje dat hij morgen op het programma heeft staan:
Je bent met z'n zessen, en je wilt tikkertje spelen. Eén neemt zes lucifers en breekt een ervan doormidden. Iedereen mag trekken. Wie de kortste trekt moet 'm zijn. Eerlijk? Waarom vind je dat? Bij eerste doordenking lijkt het erg oneerlijk.
De eerste heeft veel meer kans op een lange dan de tweede (1 op 6 en 1 op 5). En de laatste heeft helemaal geen keus meer . . . Maar ja, de mogelijkheid is niet uitgesloten dat de korte dan al getrokken is. Hoe staat het met de kansen van de laatste, die aan de beurt is?
De zaak is nog ondoorzichtig. Daarom laat hij het spel opnieuw in gedachten aan zich voltrekken:
— nummer een trekt een luficer
— de kans op de korte is 1 op 6
— nummer twee trekt een lucifer
— de kans op de korte is nu 1 op 5
— . . . maar . . .
— er is echter nog een klein kansje dat nummer een de korte had getrokken.

Stel dat nummer twee niet op de hoogte was geweest van het resultaat van zijn voorganger. Leidt deze gedachte tot een redenering die meer overtuigt.
'Ieder trekt zijn lucifer, maar laat niet zien wat hij heeft. Pas als de laatste getrokken is wordt het resultaat bekeken.' Het lijkt erop dat nu iedereen gelijke kansen heeft. Maar . . . Bij elke poging om het spel zodanig te laten verlopen dat een eerlijke verdeling van de kansen duidelijk naar voren komt, blijken steeds weer tegenargumenten aan te voeren.
Dan besluit hij het spelverloop op schematische wijze in beeld te brengen:

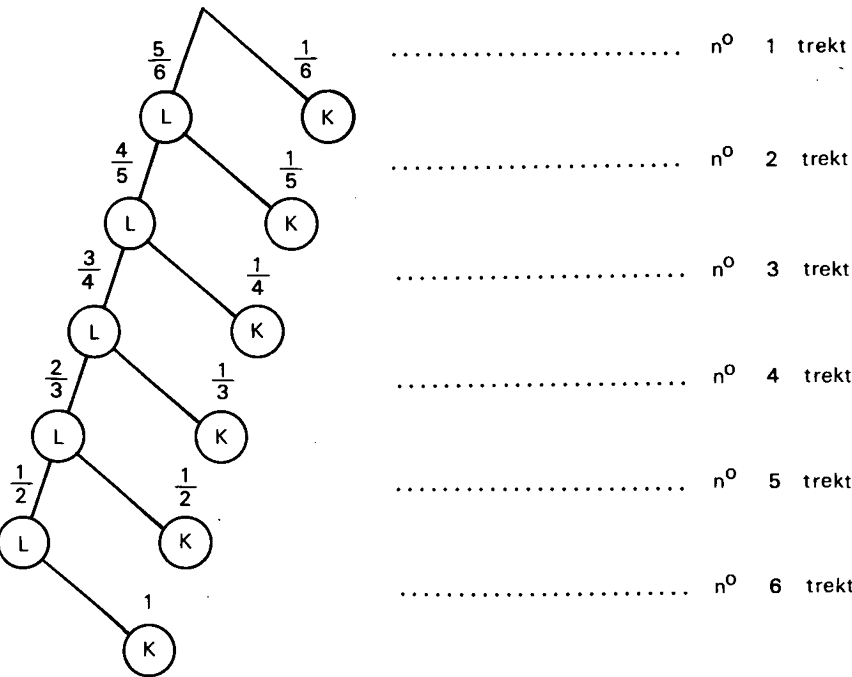


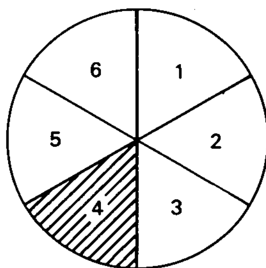
Fig. 7.

Je speelt het spel zonder 'omslag': als iemand de korte heeft, is het spel uit, de verliezer is dan bekend.
De kans dat n° 1 de korte trekt, is $\frac{1}{6}$. Je kunt dit ook zo zeggen: *Als dit spel 6000 keer gespeeld wordt, dan zal het in ongeveer 1000 gevallen met n° 1 beslist zijn.*
Ongeveer 5000 van de 6000 spelletjes gaan door met de tweede trekking.
Hierbij trekken ongeveer $\frac{1}{5} \times 5000 = 1000$ *de korte en ongeveer 4000 gaan door met nummer 3 . . .*
De kans, dat n° 2 het korte stokje trekt kun je uit het schema zo aflezen:
$\frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$.

En de kans dat pas n° 6 met het korte luciferhoutje blijft zitten is
$\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$.
Dus toch: gelijke kansen!

* * *

We zijn terug in de zesde klas.
De dobbelsteen blijkt voor vele kinderen het magische wapen in diverse spelletjes.
Vanuit het denken over toeval en kans is het instrumentarium aanwezig om het spelen met de dobbelsteen te ontdoen van een irrelevante psychologische lading. De 'zes' heeft evenveel kans als de 'een'. En de meester heeft een even kleine kans om 6 te gooien als de slechtste rekenaar in de klas. Deze rationale benadering wordt ondersteund door een beschouwing over de symmetrie van een kubus en de homogeniteit van het materiaal.
Bij het beantwoorden van de vraag of het mogelijk is een rad van avontuur (tol) te maken, die het 'dobbelen' kan vervangen, speelt het begrip symmetrie weer de hoofdrol.
De tegen deze achtergrond gekonstrueerde 'dobbelsteentol' blijkt een didaktische vondst. De (eerlijke) verdeling van de kansen is hier beter zichtbaar dan bij de dobbelsteen. Het aan het rad van avontuur inherende toeval is hier doorzichtiger gerealiseerd. De tol gaat nu in het vervolg van het onderwijsleerproces het kansbegrip op visueel nivo representeren.
We zullen in een voorbeeld zien hoe dat gaat funktioneren bij het oplossen van problemen.
'Twee jongens vonden het niet eerlijk om met hardlopen te beslissen wie hem moest zijn. Nu hebben ze iets beters uitgevonden. Ze gaan over een baan van 34 hokjes. De ene jongen gooit met een dobbelsteen en gaat net zoveel hokjes vooruit, als het aantal ogen aangeeft. De andere jongen gaat op zijn beurt steeds 4 hokjes verder. Wie het eerst over de eindstreep gaat, heeft gewonnen. Is dat eerlijk?'
De meeste kinderen besluiten onmiddellijk om het maar te gaan spelen. Een aantal hiervan denkt er nog niet aan om daarbij de uitslagen te verzamelen. Wellicht nemen ze met één spelresultaat genoegen. De vingerwijziging naar 'het toeval' zet echter ook hen aan 't denken.
Er zijn enkele leerlingen die denken dat men ook bij dit probleem zal blijven twijfelen: wat je ook doet, je zult nooit zeker zijn . . . 'Twee nivo's hoger' tekent een meisje een rad van avontuur:
en leest af:



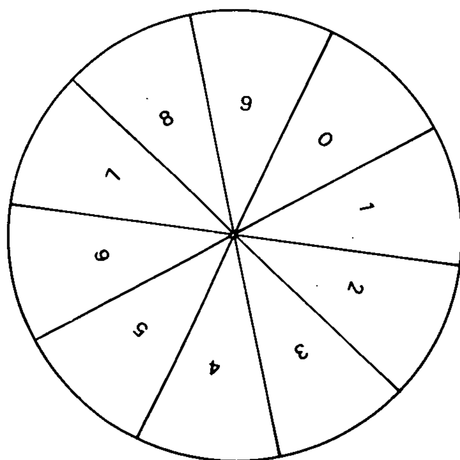
De jongen met de dobbelsteen heeft zes gelijke kansen op 1, 2, 3, 4, 5 of 6. De andere 'gooit' steeds 4 (maakt de betreffende sektor zwart). De eerste heeft 2 kansen om groter dan 4 te gooien en 3 om lager te gooien.
Dus niet eerlijk!
De rol heeft zijn werk als denkmodel gedaan.
Dat een oplossing ook zonder denkmodel, dit visuele kansbegrip, te vinden is, blijkt uit de reaktie van Margot (12 jaar). Ze zegt eenvoudig: met een dobbelsteen gooi je gemiddeld $3\frac{1}{2}$. Het spel is dus niet eerlijk!
Hoewel Margot's opmerking vrijwel direkt na de probleemstelling wordt gemaakt, zijn de andere leerlingen niet geremd in hun zoeken naar een oplossing. Deze oplossing heeft blijkbaar dusdanig nivo, dat ze niet eens als zodanig ervaren kan worden door de medeleerlingen. De 'toloplossing' is van een geheel ander nivo. Na het empirisch gezweet wordt ze het overtuigende sluitstuk van de diskussie. Je kunt het zó zien: oneerlijk!

* * *

Dat is het toppunt van pech! Elke dag moet ik 8 keer langs de AHOB's bij 't station. Soms zijn ze dicht, soms kan ik er gewoon langs. Maar vandaag! Vijf van de acht keer moest ik wachten. Zou ik vandaag mijn ongeluksdag hebben?
De klas ziet in dat een 'toppunt van pech' besproken kan worden in termen van waarschijnlijkheid. Hoe kleiner de kans, des te meer denkt men aan een pechdag.
Welnu, hoe klein is die kans dan?
De onderwijzer haast zich om nieuwe informatie te verstrekken: 'Tussen 's morgens 7.00 en 's avonds 22.00 zijn de bomen 225 keer gesloten. Gemiddeld duurt één keer 1 min 45 sekonden!
Een sektordiagram is gauw gemaakt. Het rad van avontuur met uitkomsten 'dicht' en 'open' kan gaan draaien.
Je moest 8 keer langs de AHOB's, welnu, we draaien rijtjes van 8. Zijn daar veel bij van 5 (of meer) keer dicht?
Een maat voor dit soort 'ongeluksdag' is hiermee binnen ons bereik gekomen.
Enkele slimme opmerkingen dragen er toch weer toe bij om, dit keer het probleem zelf ter diskussie te stellen: Treinen rijden toch op een vast schema en u komt elke dag toch ongeveer op dezelfde tijd langs . . . is dat wel toevallig?
De aktiviteiten met betrekking tot het AHOB-probleem doen de onderwijzer besluiten om nog een dergelijke simulatie van de werkelijkheid te laten uitvoeren. Hij kiest daartoe een nieuwe probleemsituatie:
Diefje met verlos

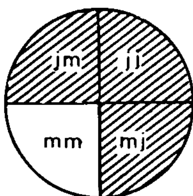
Peter speelt de laatste tijd vaak 'Diefje met verlos' met kinderen uit de buurt. Ken je het? Misschien noemen jullie het wel anders.
Peter was 'm vanmorgen en dat bleef zo tot vlak voor het eten.
Het begon zo: één van de anderen trapte de bal weg en terwijl Peter 'm op-

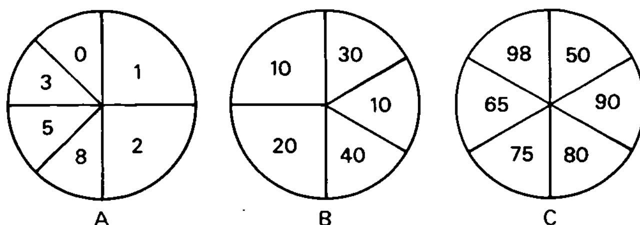
haalde gingen de anderen zich verstoppen. Peter zag Coby het eerst en buuttee haar af op de bal. Met veel moeite kon hij er nog twee afbuten, maar toen kwam Wim, trapte de bal weg en . . . Peter kon weer opnieuw beginnen. En zo ging het steeds door, er was altijd wel iemand die kans zag om de bal weg te trappen voordat iedereen afgebuut was.
Je begrijpt dat, toen men na het eten weer 'diefje met verlos' wilde spelen, niemand 'm graag wilde zijn.
Het volgende werd bedacht: ieder kiest een cijfer en we kijken bij de eerstvolgende auto die langs komt, naar het eerste cijfer van het kenteken. Wie dat cijfer heeft gekozen, valt af en hoeft 'm niet te zijn.
De anderen gaan door met het gekozen cijfer en de volgende auto bepaalt weer of er iemand afvalt.
En zo verder tot er één overblijft.
Het blijkt een eenvoudige zaak voor de klas om het spel te simuleren. De eerlijkheid van deze procedure wordt intuïtief aanvaard, wellicht gestimuleerd door de mate van kompleksiteit, die tengevolge van de vele mogelijkheden aanwezig is.



De onderwijzer blijft overigens wél met een lastig probleem op zijn nivo zitten. Tijdens het lesuur komt de brandende vraag naar voren: Hoe lang duurt zo een spelletje eigenlijk? Op z'n snelst is men na 6 keer tollen klaar, als we ervan uitgaan dat er 7 verschillende getallen door de kinderen zijn gekozen.
Maksimaal kan het spel oneindig lang duren, die 7 kan wel 'nooit' aan de beurt komen. De kans op beide uitersten is erg klein. In een boomdiagram, zoals dat bij het probleem van de zes luciferhoutjes aan de orde werd gesteld, is de zaak doorzichtig te maken. De vraag blijft evenwel: wat kun je verwachten in verband met de speelduur?

Het bekende spel Scrabble levert een volgend kansprobleem. Hoe kun je weten of de letters in dit spel 'eerlijk' verdeeld zijn? Waarom zijn er zoveel e's meer dan p's?
Je prikt in het avondblad een letter. Wedden dat 't een e is? Welk deel van je zakgeld durf je in te zetten?
Het onderzoek naar de 'kans op e' vult een stuk van het empirische kansbegrip. In heel wat gevallen moet men het met een empirische benadering doen. Maar hoe kunnen we die 'kans op e' het beste (eerlijkste) benaderen. Hier moet je juist toevallige uitschieters uitschakelen en desondanks het toeval een eerlijke kans geven. Anders gezegd: je moet ervoor zorgdragen dat de steekproef signifikant is. Waarom zou men de letters niet in een woordenboek tellen, waarom zou men niet in een engelse krant...?
Een signifikante steekproef levert een schatting van de gevraagde kans. Het is niet een exakt antwoord, het is een benadering. Maar wat doet dat ertoe. Het toeval speelt onmiddellijk een rol als we de gevonden kans operationeel gaan gebruiken.
Het spelletje 'een, twee, drie . . . plof' is nu toe aan een nauwkeuriger onderzoek. De verdeling van de kansen kan empirisch én teoretisch worden vastgesteld. De teoretische aanpak wordt gericht vanuit een eerder gesteld — nog niet genoemd — probleem met twee munten. De verdeling van de kansen op KK, KM en MM (2 keer Kop, 1 keer Kop, 0 keer Kop) is intuïtief (veelal foutief), empirisch (met twijfel) en teoretisch opgelost in de kontekst van 'eerlijke of oneerlijke' aftelspelletjes.
Het blijkt in de klas dat, naast de hierboven geschetste transfer in vertikale richting (van '2 munten' naar 't probleem van 3 munten), ook horizontale transfer optreedt:
'Martijn's buurvriendje is verhuisd naar een andere stad. De nieuwe buren komen volgende week. Martijn heeft gehoord dat ze twee kinderen hebben en nog wel ongeveer van zijn leeftijd.
Nu zit hij te piekeren: hoe groot is de kans dat ik minstens één buurjongen krijg?
Diverse kinderen ontdekken de isomorfie met het 2 munten probleem. De oplossing wordt dan direkt gegeven:
Met dit inzicht is transfer van 'een-twee-drie-plof' naar '3 munten' wellicht eveneens voorbereid.





Met z'n tweeën speel je een spel met drie tollen. Ieder op zijn beurt mag een tol kiezen. De uitkomsten tel je voor jezelf op. Wie precies 100 krijgt, wint. De aanpakken van winnaars en verliezers worden ter diskussie gesteld. Er wordt dan hardop gedacht in kansen. Geluk (of is het toeval?) speelt in dit spel de hoofdrol, maar wie bedenkt de strategie met de grootste winstkans?

* * *

En dan vertoont de onderwijzer een beeldverhaal.

* * *

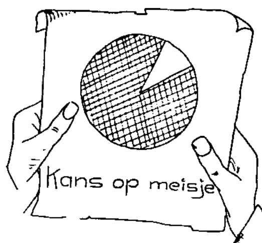
In het ziekenhuis is een kraamafdeling. Op de kraamafdeling is een speciale babykamer. Hierin liggen acht pasgeboren babies. Als ze, om een of andere reden, na 8 dagen niet met moeder naar huis kunnen, komen ze op de kinderafdeling in een andere babykamer. De zuster vertelt dat er momenteel 4 jongens en 4 meisjes babies liggen. Je vindt dat nogal logisch. Er zijn ook evenveel jongens als meisjes, evenveel mannen als vrouwen.
Natuurlijk, *de kans op een jongen is gelijk aan de kans op een meisje.* Je kunt er nog over nadenken welke van de twee beweringen uit de andere volgt, maar het vormt geen probleem voor de kinderen.
Dit is niet het geval voor de kleine Bart uit klas 2, die toevallig even iets aan de onderwijzer kwam vragen. Op de vraag of er meer jongens of meer meisjes bepaalde hij onmiddellijk zijn standpunt met: 'er zijn meer jongens, want wij moeten sterker zijn...'
De kans op de geboorte van een jongen is een half. Hoe groot is nu de kans dat er van 8 babies, die achtereenvolgens geboren worden, er precies 4 jongens zijn? En is de kans op '8 meisjes' erg klein?
Terwijl de zuster zich probeert te herinneren of de situatie van 8 meisjes in haar tijd wel eens is voorgekomen, gaat de klas aan 't werk. De fifty-fifty-geboortetol bepaalt door 8 keer draaien een situatie in de babykamer. Het aantal jongens wordt geteld en het resultaat komt meteen in een staaf (lees: stapel) grafiek op het bord. Je ziet hem groeien, in 't midden gaat het hard, aan de uiteinden vordert het langzaam.
Na tien jaar lang twee keer per maand tellen in de babykamer (ca 240 keer) zijn we in staat een voorzichtige konklusie te trekken.











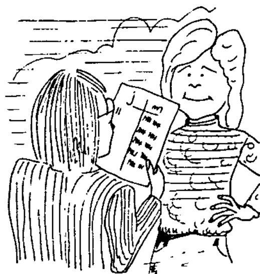












Wie begrijpt dit verhaal? De kinderen mogen de geschiedenis in een opstel verwerken. Daaruit moet blijken of de 'clou' begrepen is.

'Als je 1% in dit verband weinig wilt noemen, is '8 meisjes' inderdaad een uitzondering (uitschieter). De onderwijzer besluit om het bij deze aktiviteit te laten.
Inzicht in de isomorfie met een 8 munten probleem zou wèliswaar een entree tot een teoretische oplossing kunnen bieden, maar het bestuderen van de binomiale kansverdeling behoort niet tot de doelstellingen van dit stukje onderwijs. De leerkracht is zich dit terdege bewust. *Het gaat hem vooral om de eerste fase van een proces van het matematiseren, waarin problemen, die bij aanbieding (of liever: bij eerste ontmoeting) buiten de wiskunde liggen, binnen het wiskundig bereik van de leerlingen worden gebracht.*
Het denken over kansen, het bepalen van kansen en het verwerken hiervan in het simuleren van een stochastisch proces, zijn juist de aktiviteiten, die in dit kader passen.
Terug naar de babykamer.
De 'uitschieter van 8 meisjes' zal weinig mensen, behalve Bart uit klas 2, verontrusten.
Dit wordt anders bij het (isomorfe) probleem van de 8 surveillancewagens van het corps van de gemeentepolitie.
'We hebben 8 wagens, Bakema,' zegt de burgemeester tegen zijn commissaris. 'Is dat wel voldoende?' Bakema hoeft niet diep na te denken. Het is de laatste tijd al diverse malen gebeurd dat alle 8 wagens bezet waren bij een dringende oproep.
'Hoe groot schat je de kans dat ze alle 8 bezet zijn,' vervolgt de burgemeester. 'Daar heb je 't al,' denkt Bakema . . .
De politierapporten leveren een kanstol voor bezet/vrij van één surveillancewagen. Het simuleren met de hele klas leidt tot een scheve binomiale verdeling, die een verhelderend groeiproces op het bord beleeft.
Het antwoord van Bakema aan zijn burgemeester is in termen van kans en toeval gesteld. De burgemeester vertaalt de informatie naar zaken als risico, budget en prioriteit. *Zijn beslissing wordt gesteund door de wiskunde, maar ze wordt genomen op meer dan een argument.*

* * *

De rest van de lessen in onze zesde klas binnen het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek levert in termen van leerstof geen nieuwe gezichtspunten op. Veel meer worden de geleerde begrippen en aktiviteiten nu toegepast binnen nog onbekende probleemsituaties.
We beperken ons tot een voorbeeld. Hiermee is slechts de problematiek beschreven, het onderwijs, dat rondom 'deze som' kan plaatsvinden, zou zich vanuit de voorgaande beschouwing kunnen laten raden.

Net over 't net

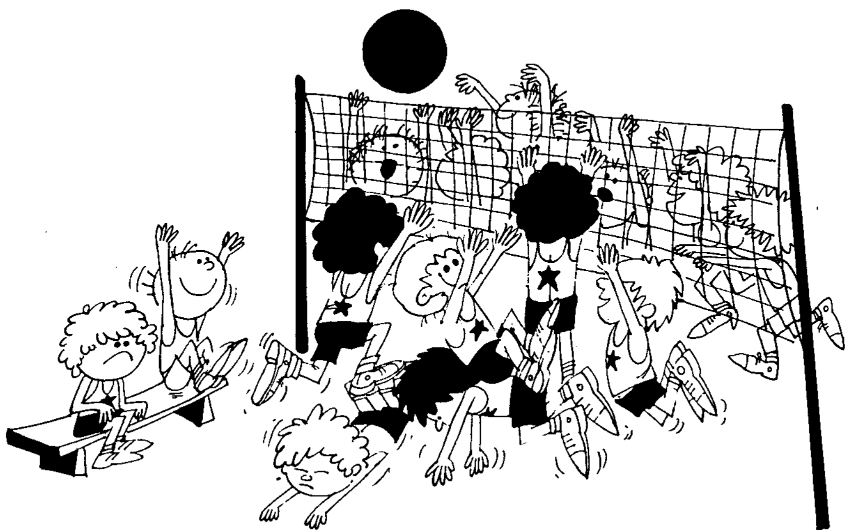
In het dorp, waar ik woon, heeft de volleybalclub BVC, een afdeling 'mannen boven de veertig'. De leden ervan zijn geweldig enthousiast.

Helaas hebben de heren echter zulke drukke banen, dat ze zeer onregelmatig komen. Nu is dat geen probleem, want als er van de 16 leden maar 6 zijn, kunnen ze spelen 3 tegen 3, dan hebben ze 'lekker de ruimte'.
Met minder dan 6 kunnen ze wel wat doen, maar dan is er niet zoveel aan.

Aan de andere kant moeten ze elkaar ook niet in de weg lopen: 6 tegen 6 — zoals het hoort bij volleybal — vinden de heren eigenlijk al wat veel! Dan wordt het zo dringen . . .

Nu hebben zich in maart 4 nieuwe leden aangemeld. Prompt hebben ze al een paar keer met 12 man moeten spelen, maar nu zijn er in de tweede week van juni, vlak voor de vakanties, voor het eerst in het bestaan van BVC 14 aanwezig geweest.
Nu gaat dat nog wel als aan elke kant slechts één wisselspeler staat, maar meer dan 14 moet het echt niet worden, dan is de aardigheid eraf!

Nu heeft gelukkig een van de leden, mijnheer Kramer, in z'n dagelijks werk veel met dit soort problemen te maken. De secretaris van BVC vraagt hem om raad. Akkoord zegt mijnheer Kramer, geef me eerst de presentielijst van de



(Uit Kijk op kans: werkboek voor de leerlingen.)

afgelopen 6 maanden eens.
De nauwgezet werkende secretaris heeft dat prompt bij de hand;

Mijnheer Kramer telt, denkt na en zegt: 'Aha, ik zie het al, als ik u was zou ik . . .'

En daar gaat het nu om: wat adviseerde hij aan de secretaris van BVC?

3. Bezinning

Met het voorgaande trachtten we een dertig tot veertigtal lesuren te beschrijven.
We hebben dit niet gedaan in termen van leerstof alleen, evenmin is er sprake van een beschrijving van de didaktische werkvormen, die achtereenvolgens gekozen zouden zijn.
Het is meer een verslag uit de klas, waarbij de rapporteur een poging heeft gedaan het leerproces, dat zich bij de kinderen (en bij de onderwijzer) voltrok, in termen van wiskundige aktiviteiten vast te leggen.
Dat hierbij de pure leerstof, in de vorm van een lijst termen, begrippen, definities, regels en stellingen — een soort inhoudsopgave van een leerboek — enigszins ongestruktureerd naar voren komt, ligt voor de hand.
Dit geldt evenzeer voor de onderwijskundige organisatorische realisatie. Het kiezen tussen groepswerk, doceerles, klassegesprek, individuele verwerking e.d. is niet eksplisiet aangegeven. Men zou dit een nadeel kunnen noemen. Een groot voordeel springt evenwel in het oog. Waarom het bij het onderwijzen immers gaat is het leren van de kinderen.
De 'filosofie' achter dit stukje wiskundeonderwijs kunnen we als volgt kort formuleren:
het is onze bedoeling om kinderen AKTIEF wiskunde te leren vanuit goed doordachte probleemsituaties.
Voordat men bij het plannen van een dergelijk onderwijs aan de klas toe is, moet men over veel informatie beschikken. Het is evident dat dit ook leerstof, didaktische werkvormen, hulpmiddelen e.d. betreft.
Meer nog zou men evenwel willen weten over de wijze waarop de leerlingen dit soort problemen *ontmoeten*, hoe ze de problematiek *als zodanig* ervaren, hoe ze geneigd zijn aan de oplossing te beginnen en welke overwegingen daarbij een rol spelen.
Voor een goede didaktische verwerking naar de klassepraktijk zou men willen weten hoe gezond verstand en instrumentele vaardigheden het vinden van een oplossing ondersteunen. Welke redeneringen grote overtuigingskracht hebben, welke materiaalfaktoren tot inzicht op hoger nivo leiden, op welke momenten men het doorbreken van inzicht kan verwachten. Welke de problemen zijn waaraan dit inzicht gemeten kan worden, wanneer een voorbeeld of schema de waarde van een denkmodel krijgt, wanneer het moment van generaliseren en/of toepassen aangebroken is.
We vermoeden dat met de gegeven beschrijving een aanzet tot het beantwoorden van dit soort vragen gegeven is.
We zijn ervan overtuigd dat we met een beschrijving in de andere zin aan deze zaken voorbij zouden zijn gegaan.

Statistiek in een industrieel concern

Drs. R.L. KROOSHOF*

Eindhoven

1. Doelstelling van het artikel

De redactie van Euclides heeft mij gevraagd te schrijven over de statistiek in een groot concern, namelijk het Philips-concern.
Voldoen aan dit verzoek verschaft mij eveneens de gelegenheid iets te zeggen over de statistiek in het onderwijs.
Om te beginnen een overzicht over de structuur van dit artikel:

Ik ga uit van een ruwe omschrijving van wat statistiek eigenlijk is en leid daaruit een aantal voorwaarden af die beslissend zijn voor de mate waarin statistiek in de praktijk wordt gebruikt. Daaruit volgt naar mijn mening een onderwijsdoelstelling: opleiden tot modelmatig denken. Over het aanleren van statistische technieken wordt ook een standpunt ingenomen: ga het onderwijs er niet mee belasten. Het is weinig zinvol voor 'later'. Wel zinvol is het inpassen van statistiekonderwijs in concrete, speciaal voor het onderwijs te ontwerpen, werkprojecten. Dit beslaat de paragrafen 2 tot en met 4.

Paragraaf 5 bevat informatie over statistiek bij Philips en vormt de overbrugging van commentaar op statistiekonderwijs naar voorbeelden van industriële toepassingsgebieden (paragraaf 6) die weer aanleiding geven tot enkele suggesties voor het onderwijs.

2. Voordat je aan statistiek toekomt

De toepassing van statistiek in een industrieel bedrijf is beslist geen vanzelfsprekende zaak. Wie nagaat wat voor vak statistiek eigenlijk is, zal dat be-

* NV Philips Gloeilampenfabrieken, afdeling Informatie Systemen en Automatie-Research, Eindhoven, VN606, tel. (040) 783645

grijpen. Immers:
Statistiek is een vak dat je pas gebruikt als je voor het nemen van een beslissing
(a) de waarde moet kennen van een of meer onbekende grootheden,
(b) weet op welke manier je uit bepaalde gegevens uitspraken kunt afleiden omtrent die onbekende grootheden en welke beslissing je dus vervolgens moet nemen,
(c) de mogelijkheid hebt deze gegevens te putten uit bestaand cijfermateriaal, experimenten of enquêtes.
Uit deze omschrijving kan men reeds afleiden welke voorwaarden moeten worden vervuld, voordat in de praktijk van statistiek gebruik zal worden gemaakt.

Uit (a) volgt als eerste voorwaarde dat de 'beslisser' bereid moet zijn zich een modelmatige en kwantitatieve voorstelling te maken van het stuk werkelijkheid, waarmee hij bezig is. Die beslisser is bijvoorbeeld een manager met een bepaalde taak in de commercie of produktie of een technisch onderzoeker.
In tal van sectoren van het bedrijfsbeleid is de bereidheid tot modelmatig en kwantitatieve methoden in de sociale wetenschappen van betrekkelijk recente zijn nog zeer beperkt. Men denke bijvoorbeeld aan het feit dat het gebruik van kwantitatieve methoden in de sociale wetenschappen een betrekkelijk recente datum is. Wat dat betreft staat de statistiek er in de technische sectoren van de bedrijfsvoering beter voor. Men is daar aan modelmatig en kwantitatief denken gewend. Maar dat is nog geen garantie dat de statistiek overal wordt toegepast waar het vak beslist veel nut zou hebben. Er moet ook nog aan andere voorwaarden worden voldaan.
Zo volgt uit (b) dat de beslisser of zijn staf op de hoogte moeten zijn van wat je met statistiek kunt doen. Deze kennis is beslist niet overal aanwezig en laat zich ook niet gemakkelijk verspreiden.
Uit (c) volgt als derde voorwaarde dat de beslisser bereid moet zijn investeringen te doen in cijfermateriaal. Hij moet bevorderen dat er continu gegevens worden verzameld en systematisch vastgelegd. Of dat men ter beantwoording van incidentele vragen experimenten en enquêtes gaat organiseren. Deze zijn dikwijls zeer kostbaar.
Dit laatste brengt ons op een vierde voorwaarde. De omschrijving van het vak met de punten (a), (b) en (c) was nog onvolledig. Bij het opstellen van regels omtrent het schatten van onbekende grootheden of het aanvaarden resp. verwerpen van hypothesen speelt voor de beslisser altijd de vraag mee, welke verliezen hij kan verwachten bij het nemen van deze of gene beslissing. Vaak wordt dit aspect van beslissingsproblemen naar de achtergrond verschoven: 'verwachte verliezen', risico's, zijn nu eenmaal moeilijk te kwantificeren. Maar ze spelen wel degelijk een rol. Ieder die zich afvraagt of hij wel een registratiesysteem voor gegevens, een proef of een enquête zal opzetten, weegt de verwachte kosten daarvan af tegen de baten die hij van de uitkomsten verwacht. Dat gebeurt zowel bewust als onbewust.

De vierde voorwaarde luidt derhalve, dat de beperking van risico's bij beslissingen moet opwegen tegen de verwachte kosten van een statistisch onderzoek.

3. Opleiding tot modelmatig denken

Alle in de vorige paragraaf opgesomde voorwaarden hangen natuurlijk sterk met elkaar samen.
Velen zullen geneigd zijn de laatste voorwaarde het belangrijkst te achten. Deze betreft namelijk het meest 'harde' aspect van de statistiekbeoefening. Dikwijls zal de statisticus die zijn vak via argumenten in deze sfeer aan de man brengt op successen kunnen wijzen. Maar dan gaat hij toch voorbij aan het simpele feit, dat een beslisser verwachte kosten en baten op een subjectieve manier afweegt. En dit afwegen hangt juist weer samen met de mate waarin hij bereid is modelmatig en kwantitatief te denken en dan daarop de op hem af komende stroom van gegevens af te stemmen.
Het is verder zo, dat pas als deze bereidheid bestaat de statisticus goed kan functioneren. Uit de dagelijkse praktijk blijkt namelijk: Bij elk onderzoek is het van belang, dat zo nauwkeurig mogelijk wordt vastgelegd wat de beslisser wil weten en welke onderzoeksstrategie zal worden gevolgd. Pas daarna is de statisticus goed in staat te vertellen, hoe men efficiënt te werk kan gaan bij het kostbare karwei van het vergaren van gegevens. Dan ook openbaart zich vaak het feit, dat met het gebruik van statistiek uit bestaand materiaal meer relevante informatie kan worden afgeleid dan voordien of dat voortaan met meer of minder of andere gegevens moet worden gewerkt.

Indien het onderwijs iets kan bijdragen tot de statistiekbeoefening in de praktijk, dan is mijns inziens de meest urgente en de beste bijdrage wel, dat men zijn leerlingen geleidelijk in staat stelt de werkelijkheid te mathematiseren. Stochastiek is dan een boeiend onderdeel van die werkelijkheid, dat zich speels laat presenteren.

4. Het aanleren van statistische technieken

Als tweede voorwaarde voor het invoeren van statistiek in een bedrijf noemden we de bekendheid met statistische technieken.
Het lijkt me van belang daarover een paar punten te noemen en enkele vragen en opmerkingen die daaruit voortkomen te vermelden.
Statistiek pleegt in een industrieel bedrijf bijna steeds te worden beoefend in het kader van een aspect van de bedrijfsvoering of het oplossen van bedrijfsproblemen. Statistiekbeoefening treffen we daarom zelden in gave vorm aan, maar bijna altijd 'verpakt' in andere activiteiten. Zo is bijvoorbeeld een stuk statistiek verpakt in de keuringssystemen. Ik zou willen zeggen: Statistische technieken vinden hun toepassing in de vorm van statistische methoden.

Onder een *techniek* wil ik dan verstaan: een samenstel van beslissingsregels, die langs mathematische weg zijn afgeleid uit formele veronderstellingen. Onder een *methode* versta ik daarentegen: een samenstel van regels vastgelegd in bedrijfsvoorschriften of contracten voor het verrichten van waarnemingen, het berekenen van toetsingsgrootheden of schattingen, het raadplegen van tabellen en het trekken van conclusies.

Vele gebruikers van de statistiek zijn toepassers van een methode zonder dat zij een meer dan elementaire kennis hebben van de betreffende techniek of technieken. Dit is wel begrijpelijk omdat bij het leren en toepassen van een methode de statistische kennis niet veel meer kan zijn dan één van de onderdelen van het totale kennispakket.
De invoering van routinematig toe te passen technieken is een omvangrijk karwei. Het 'verpakken' van een techniek in een methode vereist een zorgvuldige voorbereiding. Er moeten voorschriften, voorlichtende publicaties en cursussen worden ontworpen. Dit alles moet zo gebeuren dat een methode door het management als een zinvol stuk gereedschap voor de bedrijfsvoering wordt geaccepteerd. Een 'methode' is dan ook altijd het resultaat van een uitgebreide overlegsituatie.
Statistiek wordt uiteraard ook gebruikt bij het behandelen van niet-routinematig op te lossen problemen. Dit komt onder meer voor bij de ontwikkeling van nieuwe produkten, het opsporen van oorzaken van moeilijkheden in produktieprocessen of het zoeken van een optimale combinatie van waarden van instelbare procesvariabelen. In dergelijke gevallen moet meestal gebruik worden gemaakt van niet-elementaire technieken. Een succesvolle toepassing daarvan vereist net zo goed als bij routinetoepassingen een integratie van de techniek in een methode, maar deze moet dan van geval tot geval ontworpen worden. De methode omvat nauwkeurige voorschriften omtrent de opzet, de voorbereiding, de uitvoering en de analyse van een proef.
Ook hier zijn deze voorschriften vaak het resultaat van een onderhandelingsproces:
Enerzijds is er de technicus met zijn problemen. Vaak wil hij door middel van één experiment zoveel mogelijk gegevens verkrijgen, maar tegelijk ook het aantal te verrichten waarnemingen zo klein mogelijk houden.
Anderzijds is er degene die reeds enige ervaring met het opzetten van proeven en de analyse van de resultaten heeft. Hij kan diverse proefschema's voorstellen en aangeven welke mogelijkheden en beperkingen daaraan verbonden zijn.
Verpakking van statistische technieken vindt voor een belangrijk deel ook plaats via computerprogramma's; tal van Philipsonderdelen zijn via terminals en telefoonlijnen verbonden met het rekencentrum te Eindhoven. Dit centrum biedt in de eerste plaats een aantal programma's voor kleinere rekenpartijen. Deze zijn conversationeel te gebruiken, dus via een vraag- en antwoordspel. In de tweede plaats zijn er enige tientallen programma's, die niet conversationeel zijn voor gevallen waarin veel gegevens verwerkt moeten worden of ingewik-

kelde berekeningen nodig zijn.
De beschikbaarstelling van computerprogramma's leidt enerzijds tot popularisering van de statistiek, maar houdt anderzijds het gevaar in van onoordeelkundig gebruik van de daarin verwerkte statistische receptuur.

Uit het bovenstaande vloeien enkele vragen voort betreffende het statistiekonderwijs.
De hoofdvraag is: moet men in het voortgezet onderwijs pogen de leerlingen zo in te voeren in de statistiek, dat men ze een of meer eenvoudige statistische technieken kan aanleren?
Ik meen, dat dit wegens de ingewikkeldheid van de theoretische achtergronden toch neerkomt op een onvolledige behandeling of op het aanleren van een 'methode', een voorschrift dus, dat dan geen enkel verband houdt met de werkelijke praktijk. Maar . . . biedt diezelfde praktijk niet het voorbeeld, dat statistiek nu juist een vak is, dat zich laat inpassen in concrete werkprojecten? De werkelijke praktijkgevallen zullen voor de school te ingewikkeld zijn, maar dit sluit niet uit dat er toch wel projecten te bedenken zijn, die zich gemakkelijk in het onderwijs laten inpassen.
In het kader van zo'n project kan dan ook enige aandacht geschonken worden aan het aspect 'proefopzetten', dat is het ontwerpen van experimenten. Het is voor het ontwerp van elk experiment van belang van tevoren te specificeren welke vragen men beantwoord wenst te hebben en hoe nauwkeurig de uitkomsten dienen te zijn. Voorts moet men zich afvragen welke storende invloeden kunnen optreden en beslissen hoe men die uitschakelt of hoe men het effect daarvan verwerkt in een mathematisch model. Tenslotte moet men nagaan welke waarnemingen gedaan moeten worden.
Over zo'n experiment zou dan ook door de medewerkende partners onderling gediscussieerd moeten worden. Over het onderzoek moeten rapportjes worden gemaakt. Want rapporteren hoort bij dit vak en is tegelijk het moeilijkste onderdeel. Bij het onderdeel rapporteren kunnen diverse conventies betreffende het presenteren van gegevens worden besproken.
Misschien biedt paragraaf 6 stof voor ideeën.

5. Statistiek bij Philips

Deze paragraaf heeft tot doel de stof van de vorige paragraaf wat te verlevendigen met een ruwe schets van de stand van zaken betreffende de statistiek in dit concern. Zo wordt meteen een achtergrond geschilderd voor de volgende paragraaf, die over enkele toepassingsgebieden gaat.
Philips is een internationaal georiënteerd concern dat een grote reeks produkten voortbrengt. Dit brengt een aantal organisatorische consequenties met zich mee die ook van belang zijn voor de statistiekbeoefening. Vandaar dat we iets over de Philipsorganisatie vertellen.

a. Het concern heeft steeds gestreefd naar een zo nauw mogelijke aansluiting bij de nationale omstandigheden in de landen waar het concern actief is. Daarom zijn de activiteiten per land in het algemeen onder bestuur gesteld van een 'Nationale Organisatie' (N.O.).

b. Per groep van produkten is echter een sterke wereldomspannende coördinatie nodig, bijvoorbeeld ten aanzien van de ontwikkeling, geografische spreiding van de produktiecapaciteit en de planning van de produktie. Hiertoe zijn 'Hoofd Industrie Groepen' (H.I.G.-en) opgericht.

c. In het geheel van de interacties tussen N.O.'s en H.I.G.-en speelt de concern-centrale een belangrijke rol. Deze concern-centrale bestaat uit de Raad van Bestuur en een conglomeraat van daaronder resorterende staforganen.

In elke N.O. en H.I.G. en vaak ook in elk van hun onderdelen, hebben deze staforganen hun 'lokale' afdelingen waarmee ze een intensieve communicatie onderhouden. De lokale afdelingen zijn in hoofdzaak op hun eigen N.O., H.I.G. of onderdeel daarvan georiënteerd.

De centrale en lokale staforganen nu zijn dikwijls de plaatsen waar men statistici aantreft. Maar ook bij laboratoria en kwaliteitsdiensten zijn ze te vinden. Het globale beeld is er een van een gedecentraliseerde opstelling van de statistiekbeoefenaren.
Tot voor kort was er in het concern geen centraal beleid ten aanzien van het vak statistiek. Enkele jaren geleden is echter de C.C.T.S. opgericht: de Concern Coördinatiegroep Toepassing Statistiek.
Het werkingsgebied van deze groep betreft voorlopig alleen nog maar Nederland. Deze situatie hangt samen met de N.O.-indeling van het concern.
Wat ons land betreft mag men gerust stellen, dat de statistiek in het concern op grote schaal wordt toegepast. Dit is vooral te danken aan het werk van enkelingen, die in het concern of een H.I.G. tal van medewerkers voor het vak enthousiast gemaakt hebben.
Op enkele plaatsen is zoveel statistisch werk te doen, dat zich daar inderdaad professionele groepen konden vormen.
Deze groepen hebben enige tientallen medewerkers. Het aantal toepassers bedraagt echter enkele honderdtallen. Met andere woorden: de beoefening van de statistiek is bij Philips beslist niet het privilege van gespecialiseerde groepen of afzonderlijk opgestelde specialisten. Het vak is in handen van een zeer grote schare van 'leken'. Als we ons precieser uitdrukken moeten we er echter bij zeggen, dat de statistiek in het concern geen homogeen vak is, maar in de praktijk uiteenvalt in deelvakken afhankelijk van de diverse toepassingsgebieden. De omvang en de professionaliteit van de statistiekbeoefening hangt voorts sterk samen met de omvang en de urgentie van de op te lossen pro-

blemen.
Het ruime gebruik dat in het concern gemaakt wordt van statistiek doet niets af aan de noodzaak van activiteiten ten behoeve van:
— het systematisch verbreiden van het vak,
— het vergroten van het inzicht in het vak bij de gebruikers.
Deze behoren uit te gaan van de staforganen.
Eén van de taken van de staforganen is het stimuleren en coördineren van vernieuwingen in de bedrijfsvoering.

Wat de statistiek betreft nemen de ISA (Informatiesystemen en Automatie) en de TEO (Technische Efficiency en Organisatie) onder de staforganen een speciale plaats in. De ISA heeft een groep ten behoeve van de research op statistisch gebied. Bij de TEO werken enige statistici die zich vooral bemoeien met de verbreiding van het vak door demonstratie, voorlichting, opsporen van toepassingen, enz.
De afdeling Interne Bedrijfsopleidingen (I.B.O.), het staforgaan van Sociale Zaken is de organisator van diverse interne opleidingen. Vele honderden mensen hebben de IBO-cursus 'Inleiding Statistiek' gevolgd, vaak als onderdeel van een groter cursuspakket. Deze cursus is de belangrijkste van de drie interne opleidingen die zijn genoemd in figuur 1.
Rechts in figuur 1 zijn de beroepsopleidingen genoemd die, uitgezonderd die voor Wetenschappelijk Rekenaar, uitgaan van de Vereniging Voor Statistiek en worden gegeven door verschillende instituten. Het deelnemen aan deze cursussen wordt vanuit het bedrijf gestimuleerd en ondersteund.

Tenslotte iets meer over de Concern Coördinatiegroep Toepassing Statistiek: Hierin werken diverse staforganen en lokale groepen uit enkele H.I.G.-en samen.
Een goed voorbeeld van de propaganda die de CCTS voor de statistiek voert is het uitbrengen van een boekje: 'Geef de statistiek een kans' dat een achttal beschrijvingen bevat van toepassingen op een groot aantal terreinen, zoals genoemd in paragraaf 6.
Verder verzorgt de CCTS een *bulletin* dat mededelingen bevat omtrent de *CCTS-lezingen*, nieuwe programmatuur, lezenswaardige artikelen in de vakliteratuur en komende congressen en cursussen.
De CCTS stelt zich ook op als adviserend orgaan ten aanzien van verschillende beleidsaspecten betreffende de statistiekbeoefening. Zo heeft CCTS een permanente commissie in het leven geroepen Begeleiding Opleiding Statistiek, belast met de evaluatie van bestaande cursussen en het doen van voorstellen voor het totale opleidingsbeleid op statistisch gebied. De cursus Voortgezette Verklarende Statistiek is een voorbeeld van een initiatief van de CCTS op het gebied van de opleidingen.

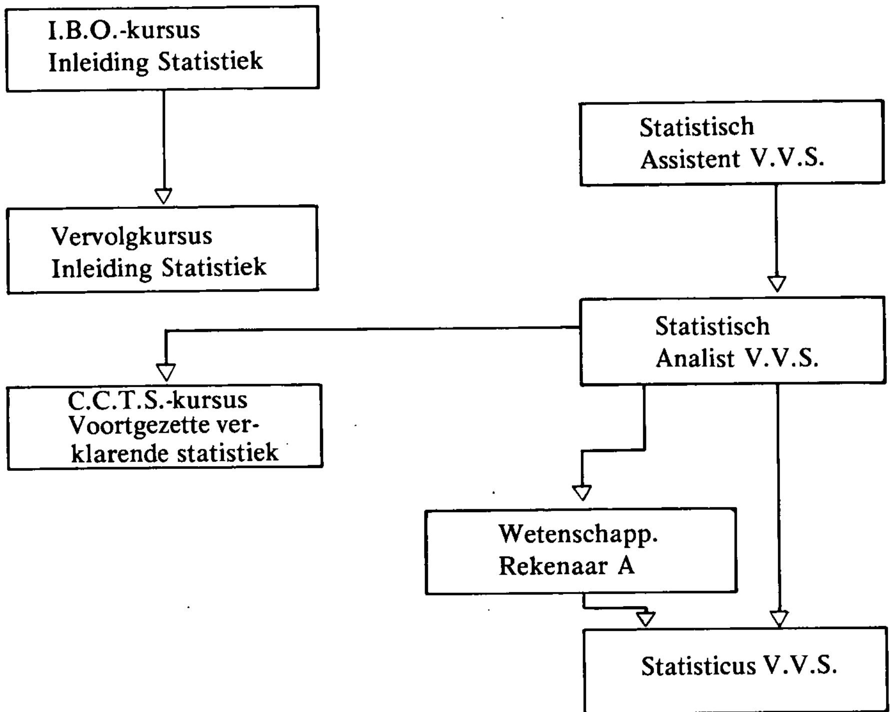


Fig. 1. Schematisch overzicht statistiekopleidingen.

6. Toepassingsgebieden

Wie de toepassingsgebieden van de statistiek in een concern als Philips wil identificeren zal het bedrijf in moeten gaan. Men kan dat desgewenst in abstracto doen aan de hand van het schema in figuur 2. Dit schema is zo algemeen gehouden dat het in principe betrekking zou kunnen hebben op het concern als geheel of op een afzonderlijke H.I.G. De bedoeling ervan is slechts aan de hand van de activiteiten in een industrieel bedrijf de plaatsen op te sporen waar statistische activiteiten te verwachten zijn.

Van alle toepassingsgebieden worden er slechts enkele besproken en wel die, welke ook voor het onderwijs ideeën zouden kunnen opleveren. Concrete, op zichzelf staande toepassingen noemen we niet: echte praktijkgevallen zijn te moeilijk en men zal zelf 'cases' moeten ontwerpen en gegevens uit eigen omgeving moeten halen. Zou er niet een landelijk instituut moeten zijn, dat ten behoeve van het onderwijs cases ontwerpt?

Administratie

In het concern wordt in toenemende mate gebruik gemaakt van modellen waarin de relaties tussen tal van bedrijfseconomische variabelen wiskundig zijn vastgelegd. Hieronder vallen modellen voor de evaluatie van investeringsprojecten en modellen voor de analyse van de jaarlijkse budgetten van bijvoorbeeld een N.O.

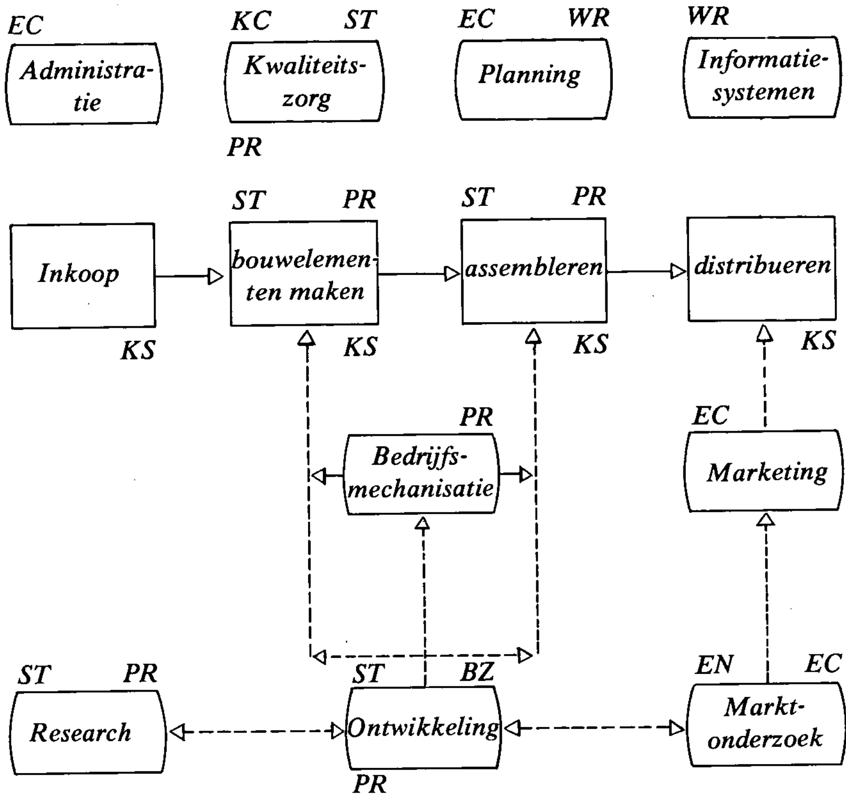
Dit is een uitstekend gebied voor het 'mathematiseren van de werkelijkheid'. Men kan met dergelijke modellen veel doen:
(a) Het beantwoorden van 'what-if'-vragen; wat gebeurt er bijvoorbeeld met de winst als de omzet volgend jaar 10% groter is dan in dit jaar.
(b) Monte-Carlo: De omzet van volgend jaar is onbekend. Wel is bekend, dat hij te beschouwen is als een trekking uit een normale (of andere) verdeling waarvan de parameters bekend zijn. Verricht honderd trekkingen en bepaal de verdeling van een aantal van die omzet afhankelijke bedrijfseconomische variabelen. Gebruik daarbij handige rekenhulpmiddelen, zoals tabellen of nomogrammen.
(c) Tracht uit bestaand statistisch materiaal en overheidsstatistieken allerlei gegevens te halen voor de bouw van een model.

Kwaliteitszorg

De kwaliteitszorg tijdens alle fasen van het produktieproces vormt in een bedrijf, waar de meeste produkten in serie worden gemaakt, een omvangrijke activiteit. Honderden medewerkers zijn hierbij betrokken; niet alleen de controleurs, maar ook produktiechefs, laboratoriumpersoneel, e.a.
Het is een toepassingsgebied voor het gebruik van frequentieverdelingen, normale verdeling, poissonverdeling, het registreren van niveau- en spreidingskenmerken en het daarmee opsporen van kwaliteitsafwijkingen. Een gebied waar ook stukjes beschrijvende statistiek en rapportage een toepassing kunnen vinden.

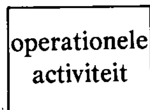
Planning

We gaan in dit artikel niet in op de verschillende planningsprocedures in het concern, maar volstaan met het noemen van slechts twee onderwerpen waarvoor planning noodzakelijk is:
— personeelssterkte: zowel ten behoeve van een sociaal beleid als uit het oogpunt van efficiency is het gewenst schommelingen in de personeelssterkte te dempen. Deze schommelingen kunnen ontstaan door seizoenpieken in de verkoop of door korte conjunctuurcycli.
— dagelijkse besturing van de goederenstroom: hiervoor bestaan zeer grote op computergebruik gebaseerde planningsystemen.

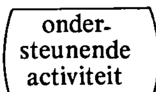


Toelichting op het schema van figuur 2.

Symbolen:



goederenstroom



ideeën, gedachten

Afkortingen

BZ	bedrijfszekerheidsbepaling
EC	econometrie
EN	enquêtering klanten
KC	kwaliteitscontrole
KS	keuringssystemen
PR	proefopzetten
ST	(elementaire) schattings- en toetsingstechnieken
WR	waarschijnlijkheidsrekening

Fig. 2. Schema van toepassingsgebieden

Het lezen van dit schema kan beginnen bij de keten van rechthoeken, die betrekking hebben op de dagelijkse activiteiten voor de instandhouding van de goederenstroom. De overige activiteiten zijn in het schema aangeduid met afgeronde rechthoeken. Daarvan hebben we twee soorten onderscheiden:

— boven de keten staan activiteiten die betrekking hebben op het besturen van de goederenstroom. Elk van deze activiteiten heeft betrekking op de *gehele* goederenstroom.

— onder de keten staan activiteiten die nodig zijn voor expansie en vernieuwing van de goederenstroom. De onderbroken lijnen stellen stromen van 'ideeën' en de daarbij behorende gegevens voor.

De statistische activiteiten zijn ingetekend op basis van kennis, die onder meer ontleend is aan een in 1971 gehouden enquête onder statistiekbeoefenaren bij Philips in Nederland.
Slechts de belangrijkste activiteiten zijn ingetekend.

In beide gevallen zijn voorspeltechnieken van belang. Dit is een gebied, waarop men met eenvoudige modellen al heel aardig kan spelen.

Keuringssystemen

De kwaliteit van produkten kan sterk afhangen van de kwaliteit van de ingekochte grondstoffen en halffabrikaten. Voorts heeft Philips enerzijds te maken met tal van 'professionele' afnemers (andere bedrijven, overheden), anderzijds met steeds sterker georganiseerde consumenten. Hoe dan ook: ingangs- en uitgangscontrole op partijen goederen is van enorme betekenis. Hiertoe bestaan gestandaardiseerde systemen, die honderden werknemers in contact brengen met stukken statistiek.
Dit is een bekend exercitieterrein bij het opstellen en maken van vraagstukken over toetsen. Moeten we daarnaast ook niet aandacht schenken aan de manier waarop steekproeven worden getrokken?

Produktieprocessen, bedrijfsmechanisatie

Gedurende elk produktieproces kan men tal van gegevens genereren ten behoeve van diverse doeleinden, onder meer voor de kwaliteitszorg. Dit gebeurt in toenemende mate automatisch en vereist de oprichting van statistische groepen: niet alleen voor de analyse van de gegevens, ook voor adviezen inzake het probleem, welke gegevens geregistreerd moeten worden.
Een andere taak voor statistici is te helpen problemen op te lossen die tijdens de produktie ontstaan. Ze kunnen dat doen door adviezen te geven bij het opzetten van experimenten. Via experimenten kan men ook streven naar een optimale instelling van de instelbare proces-variabelen.
De statistische toepassingen zijn hier dikwijls gecompliceerd, maar onderwerpen als 'proefopzetten' en 'optimalisatie' zouden in een enkel geval geschikt kunnen zijn voor de school.

Marktonderzoek

Het marktonderzoek heeft betrekking op de totale omvang van de markt voor een produkt (of door een produkt te vervullen functie) de groei daarvan op korte of lange termijn, het marktaandeel, enz. Samen met externe bureau's worden voortdurend uitvoerige onderzoekingen gedaan.
Bij marktonderzoek wordt veel met enquêtes gewerkt. Het opstellen van enquêtes — met toepassing van wat al over 'proefopzetten' werd gezegd — en de verwerking daarvan, kan reeds op heel eenvoudig niveau gedaan worden. Het geeft oefenstof voor wat beschrijvende statistiek en rapportage. Het geeft ook aan de beschrijvende statistiek een doel: hulpmiddel zijn voor analyses en voor het nemen van beslissingen. Toetingstechnieken hoeven daar nog niet aan te pas te komen.

7. *Naschrift*

Het zou voor de statistiek in de praktijk bijzonder belangrijk zijn als in het voortgezet onderwijs de leerlingen reeds vertrouwd werden gemaakt met
(1) stochastische verschijnselen
(2) het mathematiseren van de werkelijkheid
(3) het beslissen volgens formele regels
(4) in samenhang met de eerste drie punten: het doelmatig verzamelen en representeren van waarnemingen en het schriftelijk rapporteren. Wat voor methoden en voorbeelden daarbij worden gebruikt is niet van belang, hoe speelser ze zijn hoe beter. Aan kennis betreffende elementaire statistische technieken, zoals met name het toetsen van hypothesen, bestaat volgens mij minder behoefte. Bovendien zal zulks steeds onvolledig moeten gebeuren, terwijl het onmogelijk is inzicht te geven in de diepere achtergronden.

Het gebruik van de statistiek in het levensverzekeringsbedrijf

DRS. F. 't SAS

Nationale-Nederlanden N.V. Rotterdam.

Toepassingen van wiskundige statistische analyses op de produktie- en aktiviteitengegevens van het Levensverzekeringsbedrijf zijn van groot belang.

Belangrijke aktiviteiten van het Levensverzekeringsbedrijf zijn:
1. De instandhouding van een buitendienstorganisatie en een commerciële binnendienstorganisatie (Marketing, Productmanagement en Publiciteit)
2. De instandhouding van deskundigheid terzake van beleggings-, juridische-, verzekeringswiskundige- en fiscale zaken.
3. De instandhouding van een administratieve organisatie.
4. De instandhouding van een budgetteringssysteem opdat tegenover de baten (premies en beleggingsopbrengsten) verantwoorde lasten staan, waardoor de continuïteit van het bedrijf is gewaarborgd.

Op de stam van de registrerende en ordenende beschrijvende statistiek groeit de vertrouwdheid met de daarop geënte analytische wiskundige statistiek. Beleidsbeslissingen met steeds verder strekkende gevolgen vragen om een hechter bondgenootschap met de kansberekening zodat verantwoord generaliserend gedacht en gehandeld kan worden in termen van voorspellings- en betrouwbaarheidsintervallen.
Uit vele praktische toepassingen van de kansberekening kies ik bij elk van de vier belangrijke aktiviteiten een voorbeeld.

Ad 1 (Buitendienst en commerciële binnendienst)

Correlatie

Met behulp van *de beschrijvende statistiek* worden uit de produktiegegevens de waarden van talrijke verzekeringstechnische facetten (verzekeringsvorm, premie, verzekerd bedrag e.d.) en facetten van de cliënt (leeftijd, beroep, woon-

plaats, burgerlijke staat etc.) in de vereiste vorm vastgelegd.
Nadat de verdelingen van de waarden van deze grootheden zijn gevonden wordt de samenhang tussen de grootheden en de mate van die samenhang vastgesteld met behulp van middelen, welke voor een groot deel berusten op *de wiskundige statistiek.*
De beleidvoerenden krijgen zodoende een duidelijk beeld van de onderlinge wisselwerking tussen b.v. de aard van het produkt en de eigenschappen van de gebruikers.
Door *de kansrekening* worden zij in staat gesteld onderscheid te maken tussen verbanden met een toevallig karakter en verbanden welke systematisch zijn. Met deze wetenschap kan het verkoopbeleid worden aangepast op basis van een objectief geconstateerde rode lijn.
Op deze wijze kan ook het verband tussen de eigenschappen van een verkooppunt (inkomensverdeling, bedrijvenverdeling, eigenschappen buitendienstfunctionaris etc.) en de behaalde resultaten worden vastgesteld, waarna de zich significant afwijkend opstellende verkooppunten kunnen worden getraceerd.

Ad. 2. (Verzekeringswiskunde)

Premieberekening
Juist omdat de levensverzekering een *kansovereenkomst* is d.w.z. een overeenkomst waarvan bij de totstandkoming niet bij voorbaat vaststaat of zij voor de betrokken partijen voor- of nadelen zal opleveren, is het duidelijk dat hier de wetenschappelijke berekening van levens- en sterftekansen een zeer grote rol speelt.
Immers hoe zou het anders mogelijk zijn een prijs (premie) vast te stellen als tegenprestatie voor de geconditioneerde uitkeringen.
De verzekeringnemer noemt bij het sluiten van de verzekering zijn uitkeringscondities. De uitkeringen zelf hangen samen met leven en dood van de verzekerde.
De premie hangt — naast de grootte van het verzekerd bedrag, de in de premie vergoede rente en de kostenopslag — af van de kans op overlijden van een x-jarige verzekerde of van diens in leven zijn na n jaar.
Ter beschikking staan de overlijdensregisters van de burgerlijke stand; daaruit wordt afgeleid hoe groot de kans is dat de thans x-jarige verzekerde in elk van de volgende n jaren zal overlijden en dus tevens hoe groot de kans is, dat hij na n jaren in leven zal zijn.
Er zijn tal van verzekeringsvormen, welke ofwel alleen het overlijdensrisico, ofwel het 'langleven-risico' ofwel een mengvorm van beide verzekeringen dekken. Gecompliceerder worden de berekeningen, wanneer de verzekering op meer dan één leven wordt gesloten zoals b.v. bij de compagnonsverzekering het geval is. Wat is de kans, dat van twee compagnons, die een onverbrekelijk

belang hebben bij één bedrijf, het overlijden van de eerststervende plaatsvindt binnen *n* jaar na het sluiten van de verzekering.
Elke compagnon wil door zijn deel van de premie te betalen ervoor zorgdragen dat de nabestaanden van de andere compagnon bij diens overlijden hun deel van de boedel verkrijgen zonder dat het bedrijf te gelde gemaakt moet worden en dus veelal in feite niet gecontinueerd zou kunnen worden.

Optimale verdeling over verzekerde overlijdensuitkeringen en uitkeringen bij leven
Niet alleen bij de berekening van premies speelt de kansberekening een rol, doch ook bij de opbouw van de verzekeringsportefeuille.
Er dient een evenwichtige verhouding te bestaan tussen de verzekeringen bij leven en de verzekeringen bij overlijden. Afwijkingen van de sterfteverwachting zullen anders een te eenzijdig effect hebben op de uitkeringen.
Indien de levensduur van de mensen toeneemt, zal het bedrijf minder uitkeringen op grond van overlijdensverzekeringen behoeven te doen, doch méér uitkeringen op grond van verzekeringen bij leven.
Indien de levensduur afneemt zal het omgekeerde zich voordoen. Bij de bepaling van een optimale verdeling over verzekerde overlijdensuitkeringen en uitkeringen bij leven vormt de kansberekening een belangrijk element.

Herverzekering
Een ander belangrijk toepassingsgebied van de kansberekening in het levensverzekeringsbedrijf is de herverzekering.
Uit een oogpunt van risicospreiding zal de concentratie van een omvangrijk risico op één verzekerd leven voorkomen moeten worden. Gevolg is het overdragen van een deel van het risico naar een andere levensverzekeringsmaatschappij.
Bij de bepaling van de grens waar vandaan herverzekerd moet worden kan de *kansberekening* een functie vervullen.

Ad 3. (Administratieve organisatie)

Druktemeting en bezetting van de werkstations
Maatstaf is het aantal aanvragen voor een levensverzekering dat vanaf binnenkomst een administratieve weg volgt langs de diverse werkstations (acceptatie, wiskundige berekening, polisopmaak, comptabele verwerking, statistiek).
Hierbij speelt de aard van de verzekering een belangrijke rol. De bewerkingstijd van een eenvoudige verzekering is uiteraard korter dan de tijd die de aanvraag voor een gecompliceerde levensverzekering nodig heeft om polis te worden. Voorts is de stroom niet constant, omdat per soort verzekering duidelijk sprake is van seizoengevoeligheid. Om de stroom aanvragen te kunnen verwerken moeten de werkstations optimaal bemand zijn, waarbij ener-

zijds gewaakt moet worden voor overbezetting en anderzijds voor onderbezetting. In verband met de seizoenschommelingen mogen geen bottlenecks ontstaan door eenzijdige deskundigheid of door ziekte. De man of vrouw die in staat is bepaalde gecompliceerde verzekeringen te verwerken moet tijdens een seizoenspiek geassisteerd en bij ziekte vervangen kunnen worden. Bij deze gegevens moeten vragen van statistische aard opgelost worden.
Wat is de gemiddelde duur die de verzekering van een bepaald type nodig heeft om de administratieve weg af te leggen?
Wat is de behandelingsduur op een bepaald werkstation?
Hoe ligt het wachttijdenprobleem, indien een eenvoudige bewerking waarvoor voldoende mankracht aanwezig is gevolgd wordt door een gecompliceerde bewerking waarvoor specialistische kennis nodig is?
Hoe ligt de job-rotation als mogelijkheid voor de egalisering van de werkpieken?

Na de vervaardiging van *de frequentietabellen* betreffende behandelings- en wachttijden is het mogelijk *een model* te construeren, dat een duidelijk beeld geeft van het administratieve gebeuren.
Door *variatie van de parameters* van het model zoals aantal aanvragen, tijdstip van waarneming etc. kunnen allerlei situaties worden *gesimuleerd* waarin het bedrijf kan komen te verkeren. Kennis van de gevolgen van deze veranderingen is zeer belangrijk omdat slechts dan tijdig kan worden ingegrepen; nl. vóórdat die veranderingen het administratieve proces kunnen ontwrichten.

Ad 4. (Budgetteringssysteem)

Prognose en toetsing
De prognose omtrent de toekomstige resultaten is in verband met de daarmede samenhangende te verwachten verwervings- en administratieve kosten van groot belang.
De studie van de historische reeks brengt aan het licht dat elke gerealiseerde waarde uit de reeks is opgebouwd uit een aantal componenten. Zo kan men een trend-, een seizoens- en een toevalscomponent onderscheiden. Zoals reeds eerder werd opgemerkt gedragen deze componenten zich per type verzekering verschillend, zodat ook per type verzekering een historische reeks wordt onderhouden. Het ontdekken van de trend — d.w.z. de ontwikkeling zoals deze op langere termijn is waargenomen —, de seizoensbewegingen en het gedrag van het toeval maken het mogelijk per type verzekering *een model* te construeren, dat aangeeft hoe het mechanisme van het produktiegebeuren werkt.
Door aan te nemen, dat de ontwikkeling zich in de nabije toekomst overeenkomstig dit model zal gedragen, kunnen de resultaten van b.v. het komend jaar worden voorspeld.
Aangezien de statistici geen profeten zijn en dus niet de nukken en grillen van de toekomst kunnen en willen voorzien, is de voorspellende waarde van het

model weliswaar waardevol doch altijd betrekkelijk.
Naast de *voorspellende waarde* heeft het model echter een *toetsende waarde.* Indien blijkt dat de gerealiseerde waarden systematisch (dus niet toevallig) verschillen van de voorspelde waarden, dan dient deze afwijking duidelijk gesignaleerd te worden bij de beleidvoerenden terwijl tevens wellicht de aangenomen grondslagen van het model moeten worden aangepast. Bij het onderscheiden van toevallige en systematische verschillen zal de statisticus dankbaar gebruik maken van de hulp die de *kansberekening* in de wiskundige statistiek hem biedt.

Wat is en doet de Vereniging Voor Statistiek (VVS)?

1. Inleiding

De statistiek is geen hulpwetenschap van vandaag of gisteren. Duizenden jaren geleden al lieten keizers en koningen cijfers optellen en rangschikken om te bepalen hoeveel de belasting zou moeten opbrengen of op hoeveel geld en krijgslieden zij in geval van oorlog konden rekenen. Sinds lang heeft de statistiek deze exclusieve binding met staatszaken verloren die deze hulpwetenschap haar naam heeft gegeven. Op alle gebieden van techniek en wetenschap vindt zij haar toepassing. In de economie en de taalkunde, de sport en de landbouw, de sociologie en de medische wetenschappen. Daarom is de statistiek vandaag een levende wetenschap, een afspiegeling van wat zich op de vele gebieden van het moderne leven afspeelt.
De laatste decennia zijn er met de statistiek verwante ontwikkelingen geweest zoals de econometrie en de operationele research; laatstgenoemde is op een groot aantal gebieden betrokken bij de ontwikkeling en de toepassing van modellen, die steeds ten dele een statistisch karakter hebben.
De VVS verenigt allen die op deze boeiende en zich steeds uitbreidende gebieden werkzaam zijn.

2. De VVS — het doel en de middelen

De vereniging, opgericht in 1945, staat geregistreerd onder de officiële naam 'Vereniging voor Statistiek'. Het actiegebied is in de loop der tijden echter zo uitgebreid dat de internationale naam een beter beeld geeft van de terreinen die zij bestrijkt: Netherlands Society for Statistics, Biometrics, Econometrics and Operational Research.

De officiële doelstelling van de Vereniging luidt dan ook: het bevorderen van de studie en de toepassing van de statistiek, de operationele research en de

aansluitende ontwikkelingen in de wiskunde in dienst van wetenschap en samenleving.

Om dit doel te verwezenlijken, heeft de VVS als geheel een aantal activiteiten:
- de organisatie van speciale bijeenkomsten, waaronder de jaarlijkse Statistische Dag;
- de uitgave van het verenigingsblad 'Statistica Neerlandica' (4 maal per jaar);
- de uitgave van een maandelijkse publikatie, het VVS-Bulletin, met mededelingen, opgaven, korte artikelen, boekaanduidingen en personeelsadvertenties;
- het organiseren van opleidingen via de Stichting Opleidingen Statistiek;
- het organiseren van examens op het gebied van statistiek en operationele research;
- het uitlenen van tijdschriften uit eigen bibliotheek.

Maar uiteraard heeft een vereniging voor het verwezenlijken van bovenstaande doelstellingen vooral de actieve deelname van de leden nodig. Of die nu uit de zuiver-wetenschappelijke hoek komen of zich bezighouden met een van de toepassingsgebieden.
Die actieve deelname komt vooral naar voren in de secties van de VVS waarvan de meeste een bepaald toepassingsgebied tot onderwerp hebben. Er zijn zeven secties: Bedrijfssectie, Economische sectie, Landbouwkundige sectie, Medisch-biologische sectie, sectie Mathematische Statistiek, sectie Operationele Research en de Sociaal Wetenschappelijke sectie.

3. De organisatie van de VVS

Als iedere koninklijk goedgekeurde vereniging heeft de VVS een algemene ledenvergadering. Daaronder staat een bestuur van zeven personen: voorzitter, secretaris, penningmeester en vier leden, namelijk de afgevaardigden van de Commissies van Bijstand: Coördinatie-commissie (CC), Publikatiecommissie (PC), Commissie externe betrekkingen (CEB), en de Commissie opleidingen en examens (COE).

De commissies coördineren gemeenschappelijke belangen van de geledingen van de verenigingen, verlichten zo de algemene taak van het bestuur en betrekken tegelijkertijd een groter aantal leden bij de voorbereidende en uitvoerende taken in de vereniging. In dit verband dient tevens de Contactraad-VVS te worden genoemd; dit is een overlegorgaan bestaande uit vertegenwoordigers van alle besturen en commissies van de vereniging. De Contactraad-VVS vergadert enige malen per jaar en vervult de functie van klankbord van de VVS.

Het verenigingsleven speelt zich hoofdzakelijk af binnen de gespecialiseerde

secties en regionale afdelingen.

4. *De examens van de VVS*

Teneinde de studie van statistiek en operationele research op middelbaar en hoger niveau te bevorderen, heeft de VVS een aantal examens ingesteld. Deze examens worden afgenomen door VVS-examencommissies onder toezicht van rijksgecommiteerden. Meer en meer worden door bedrijfsleven, onderwijs en overheid VVS-diploma's gevraagd of zelfs geëist voor het vervullen van bepaalde functies.

De examens zijn opeenvolgend: Statistisch Assistent VVS, Statistisch Analist VVS, waarna gekozen wordt tussen OR-analist en Statisticus VVS. Het eindniveau kan op basis van een eindexamen VWO in 4 resp. 5 jaar avondstudie worden bereikt. Hiernaast bestaat er nog een elementair examen Algemene Statistiek. Voor nadere bijzonderheden wordt verwezen naar de examenprogramma's.

Nadere informatie over opleidingen voor de statistische VVS-examens kan worden ingewonnen bij de VVS-'dochter' SOS (Stichting Opleidingen Statistiek), Postbus 299, Rotterdam (tel.: 010-116181, toestel 2126).

5. *Wie kan lid worden van de VVS?*

Iedereen. Dat wil in de praktijk zeggen, iedereen die door zijn of haar studie, werkkring of persoonlijke belangstelling betrokken is bij statistiek of operationele research en de toepassing daarvan in de ruimste zin van het woord. Dat omvat een groot aantal personen, van statistische assistenten of OR-analisten bij een bedrijf tot hoogleraren in de operationele research.
Afgezien van de formele doelstellingen wil de VVS juist ook de verbinding tot stand brengen tussen de wetenschappelijke beoefenaren van de mathematische statistiek en operationele research en zij die er in de praktijk mee werken.

Informatie over lidmaatschap is verkrijgbaar bij de Administratie der VVS, Postbus 299, Rotterdam (tel. 010-116181, toestel 2126).
Aldaar is ook verkrijgbaar een beroepen-monografie: voorlichting over functies voor statistici (*f* 2,50).

Literatuur

1. In het boek *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren* deel III van Dr. Joh.H. Wansink is hoofdstuk 8 gewijd aan de waarschijnlijnheidsrekening en de statistiek.
Het hoofdstuk is verdeeld in twee delen. Het eerste deel van de hand van Prof. J. Hemelrijk heeft als titel: *De invoering van het kansbegrip in de statistiek.*
Het tweede deel van J.J. Wouters bespreekt *de invoering van de statistiek als leervak in v.w.o., h.a.v.o. en m.a.v.o.*

2. Bij de bovengenoemde artikelen in D.O.III is de volgende literatuurlijst vermeld:
Artikelen van J. Hemelrijk:
a. *statistische proefopzetten: bewijs en detectie;* Statistica Neerlandica *12* (1958) 111-118.
b. *Aselect,* Statistica Neerlandica *15* (1961) 225-237.
c. *Back to the Laplace definition;* Statistica Neerlandica *22* (1968) 13-21.
d. *Back to 'Back to the Laplace definition'* (tezamen met B. van Rootselaar) Statistica Neerlandica *23* (1969) 87-89.
Verdere aanbevolen lectuur:
I. Adler, *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek;* Aula 295, Utrecht 1966.
L.N.H. Bunt, *Statistiek voor het voorbereidend en middelbaar onderwijs,* Groningen 1964.
H. Freudenthal, *Waarschijnlijkheid en statistiek;* Haarlem 1966.
D. Huff, *How to lie with statistics;* Londen 1955.
B. van der Meer en G.S.E. Mandema, *Cijfers in lijnen,* Stichting IVIO Amsterdam.
M.J. Moroney, *Feiten en cijfers;* Marka 71 Utrecht 1967.
M.L. Wijvekate, *Verklarende Statistiek;* Aula 39, Utrecht 1969.

3. In het boek *Synopses for modern secondary school mathematics* uitgave van de O.E.E.C. is Chapter V gewijd aan *Probability and Statistics Program,* (bladzijden 262-291).
Uit de literatuurlijst bij dit hoofdstuk vermelden we:
H. Cramer, *The elements of Probability Theory and its Application.* New York: John Wiley and Sons, Inc. 1955.
College Entrance Examination Board, *Introductory Probability and Statistical Inference for Secondary Schools.* New York: The Board 1957.
W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* John Wiley and Sons, Inc. 1957.
A. Kolomogoroff, *Foundations of Probability,* New York: Chelsea Publishing Company, 1950.

4. In het *23e jaarboek* van *The National Council of Teachers of Mathematics,* getiteld *Insights Into Modern Mathematics,* staat een artikel over waarschijnlijkheidsrekening, door Herbert Robbins, New York, Washington D.C. 1957.
Bij dit artikel staat een literatuurlijst.
In het *24e jaarboek* van deze organisatie in de U.S.A. staat een artikel over waarschijnlijkheidsrekening van David A. Page en een over Statistiek van R.S. Pieters en John J. Kinsella.
Elk van deze artikelen is weer voorzien van een literatuurlijst.
De titel van het jaarboek is: *The Growth of Mathematical Ideas, Grades K-12.* Washington D.C. 1959.

5. Bij Ernst Klett Verlag te Stuttgart verschijnt reeds jarenlang een serie brochures over allerlei onderwerpen van de wiskunde. Titel van de serie: *Der Mathematikunterricht.* Aan statistiek en waarschijnlijkheidsrekening zijn gewijd de nummers
1960, Heft 3
1962, Heft 1

1966, Heft 4 (met o.a. het artikel van Arthur Engel: Propädentische Wahrscheinlichkeitstheorie)
Zijdelings met deze onderwerpen heeft het Heft 3 van 1971 te maken. Het heet: Mathematische Modelle der Wirklichkeit.
Het Heft bevat o.a. een artikel van Arthur Engel (Anwendungen der Analysis zur Konstruktion mathematischer Modelle) en van W.L. Fischer (Was heisst Mathematisierung? Worin besteht das Wesen eines mathematischen Modells? Worin besteht der Wert der Mathematik für die Naturwissenschaft von heute?)

6. Nog enkele aanbevolen boeken:
Arthur Engel, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Stuttgart, Ernst Klett Verlag.
Erwin Kreyszig, *Introductory to Mathematical Statistics*. New York, John Willey and Sons.
IOWO, Euclides 47e jaargang 1971/1972 no 7/8, maart/april.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Van Wassenaersheuvel 73, Oosterbeek.

Ditmaal een drietal opgaven ontleend aan Freudenthal, Mathematics as an Educational task (waarvan in een vorig nummer een bespreking). De derde is een grapje, bij wijze van toegift, waarvan geen oplossing gegeven zal worden.

310. Twee kennissen eten elke dag in hetzelfde restaurant. Zij komen aan, volgens het toeval verdeeld, op tijden tussen 6 en 8 uur en blijven precies drie kwartier. Hoe lang zijn zij gemiddeld samen in het restaurant aanwezig?

311. A heeft een aantal loten genummerd 1 tot en met n. Hij trekt deze loten (zonder teruglegging). B raadt elke keer welk lot A getrokken heeft. Na afloop wordt hem meegedeeld hoe vaak hij goed geraden heeft. Voor elke keer goed raden krijgt hij 1 gulden. Hoeveel zal B gemiddeld krijgen (als dit spel vele malen gespeeld wordt)?

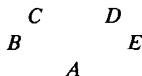
Is het essentieel, dat eerst na afloop meegedeeld wordt hoe vaak goed geraden is en dat dus niet elke keer direct 'goed' of 'fout' wordt gezegd?

304. Twintig personen $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ trekken elk een lot ten overstaan van een notaris. Er zijn precies twee prijzen. A_1 is nieuwsgierig en vraagt de notaris hem de naam van een van de anderen te noemen die een prijs heeft. De notaris ziet de loten in en zegt tegen A_1 : A_{12} heeft een prijs. 'Dan heb ik nog maar een kans van 1/19 om de andere prijs te hebben' antwoordt A_1.

Oplossingen

308. Op een familiereünie zijn aanwezig een vader, een moeder, een oom, een tante, een zoon, een dochter, een neef (cousin), een neef (nevue), een nicht (cousine) en een nicht (nièce). Hoeveel personen waren minstens aanwezig?
Minstens vier. Namelijk een man en zijn zuster. Beiden zijn getrouwd, maar hun echtpartners zijn niet aanwezig. Verder van een van hen een zoon en van de ander een dochter.

309. Om een ronde tafel zitten vijf wethouders als volgt.



Uit hun midden moeten ze een burgemeester kiezen. Daarbij geldt algemeen: P stemt op diegeen die op de linkerbuurman van P stemt. Hoe liep het af?

A stemt op A ⇒ A stemt op B Contradictie.
A stemt op B ⇒ B stemt op B ⇒ B stemt op C Contradictie.
A stemt op C ⇒ C stemt op B ⇒ B stemt op D
⇒ D stemt op C ⇒ C stemt op E. Contradictie
A stemt op E ⇒ E stemt op B ⇒ B stemt op A
⇒ A stemt op C. Contradictie.

Blijft alleen over:
A stemt op D, B op E, C op A, D op B en E op C.
En nu maar wat beters bedenken.

von

Van 6 t/m 9 april 1974 organiseert de Vereniging voor het Onderwijs in het Nederlands (VON) in samenwerking met de drie Landelijke Pedagogische Centra haar jaarlijkse konferentie op de Leeuwenhorst in Noordwijkerhout.
Aan de konferentie nemen (moedertaal)docenten deel van alle types van onderwijs, d.w.z. van kleuterscholen tot en met universiteiten. De konferentiegangers kunnen inschrijven op één van de zes zgn. stromen, die elk ± 60 mensen omvatten. Binnen de stroom verdelen de deelnemers zich over kleinere werkgroepen.
Stroom 6, waarvoor wij uw speciale aandacht vragen, draagt de naam *Moedertaalonderwijs en toch geen Nederlands.*
Deze stroom zal zich bezighouden met de rol die de taal speelt in de gehele onderwijsleersituatie.
Daarbij rijzen zeker een drietal belangrijke vragen.
— Kan een docent zich zijn taalgebruik zo bewust maken, dat hij in staat is een taalgebruik te kiezen dat past bij het doel dat hij in zijn les wil bereiken?
— In hoeverre is elke docent een moedertaaldocent, als hij zijn leerlingen de taal leert gebruiken die bij zijn vak past?
— Op welke manieren kan er een vruchtbare samenwerking ontstaan tussen (vak)docenten en moedertaaldocenten bij de ontwikkeling van het taalvermogen van hun leerlingen?
Als deze stroom zijn doelstelling wil bereiken is de deelneming van een aantal docenten die géén moedertaalonderwijs geven een noodzaak.
Wij willen proberen zoveel mogelijk vakken en schooltypes in onze stroom te laten vertegenwoordigen: van een leraar autotechniek tot een leraar muziek, van een lerares huishoudkunde tot een lerares kunstgeschiedenis.
Wij hebben toestemming gekregen een beperkt aantal plaatsen, nl. 30, te reserveren voor niet-moedertaaldocenten. De docenten die uitgenodigd zullen worden, betalen de konferentieprijs die geldt voor de VON-leden (vorig jaar ± *f* 40,—).
Voor deze bijzondere gelegenheid zoeken wij docenten die geïnteresseerd zijn in de bovenomschreven problematiek en die samen met ons willen zoeken naar een begin van een antwoord.
Inlichtingen bij J.J. Sturm, Langegracht 16, Kapelle (Z-B), tel. 01102-2079.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Contributie
De penningmeester heeft tot zijn droefenis ook dit jaar moeten constateren, dat er nog enkele honderden leden zijn, die hun contributie over 1973-1974 nog niet betaald hebben. Hij dringt er bij de leden dan ook op aan hun geweten en hun kasboek te rade te gaan. Mocht u nog niet betaald hebben, dan gaarne per ommegaande *f* 20,— op giro 142917, t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

Stichting Mathematisch Centrum

Vakantiecursus voor leraren VWO en andere belangstellenden 1974

De jaarlijkse door het Mathematisch Centrum te organiseren Vakantiecursus voor leraren VWO en andere belangstellenden zal dit jaar plaatsvinden

in AMSTERDAM op 14 en 15 augustus 1974

in EINDHOVEN op 15 en 16 augustus 1974

Onderwerp: *'Algebraïsche vergelijkingen'*

1e dag:
1. Geschiedenis van het oplossen van hogere machtsvergelijkingen, spreker: drs. H.J.M. Bos (Rijksuniversiteit — Utrecht)
2. Galoistheorie, spreker: Prof. dr. P. Mullender (Vrije Universiteit — Amsterdam).

2e dag:

3. Constructies met passer en liniaal, spreekster: Mevr. Dr. A.B. Paalman — de Miranda (Universiteit van Amsterdam)
4. Eindige lichamen, spreker: drs. H.W. Lenstra jr. (Universiteit van Amsterdam)
5. Numerieke oplossingsmethoden van algebraïsche vergelijkingen, spreker: drs. W. Hoffmann (Mathematisch Centrum).

Nadere bijzonderheden zullen zo spoedig mogelijk bekend gemaakt worden.
Inlichtingen zijn te verkrijgen bij het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam — O, tel. 020-947272, toestel 41 of 64.

Institute for the Didactics of Mathematics established by the VW Foundation has started work at the University of Bielefeld (FRG)

In 1969 the Volkswagenwerk (VW) Foundation had invited tenders for various projects with a view to furthering the didactics of mathematics and natural sciences, the main project being the establishment of a *central, supraregional Institute for Didactics of Mathematics (IDM).* Several universities had applied for the IDM. In January 1972 the VW Foundation decided in favour of the application sent in by the University of Bielefeld.

After the advisory board for the establishment of the IDM together with the University of Bielefeld and the VW Foundation had finished the preparatory work the first posts could be filled at the IDM in 1973. With Professor Dr. Michael Otte as managing director the Institute started work on October 1st, 1973, being temporarily located in rented rooms at Jöllenbeck near Bielefeld. Meanwhile, Professor Dr. Heinrich Bauersfeld, Frankfurt, and Professor Dr. Hans-Georg Steiner, Bayreuth, after having accepted their 2 appointments, have also joined the IDM. Presently the IDM is staffed with 4 scientific and 9 non-scientific collaborators besides the 3 university professors. For the time being a staff consisting of 20-25 professors and scientific collaborators, including also posts for guests from Germany and abroad, is considered as a possible final capacity.

The tasks of the Institute for the Didactics of Mathematics include the promotion of mathematical didactics by means of research, development and advisory activities, comprising in particular:
a Assistance with curricular development in the field of mathematics learning, by theoretical and experimental work
b Elaboration of a theoretical framework for research in the domain of mathematical didactics, in close interdisciplinary connection with the advances of mathematics and other sciences of reference

c Promotion of young scientists working in the field
d Building up of an international library for mathematical didactics, encouragement of contacts at home and abroad, distribution of information and promotion of public relations.

Its main fields of study under consideration for the nearest future will still have to be defined more closely by the IDM. A team has begun to review and evaluate the contributions on educational psychology published by Bruner, Piaget and others, with reference to their importance for mathematical didactics. The results are to be reported in one of the first numbers of a series of publications planned by the IDM. In May 1974, together with staff members of the I.R.E.M., Paris, a workshop addressed to problems of the renovation of mathematics teaching at senior high school and college level and a development and situation analysis related to the problem whether teaching of set theory at the elementary school is useful or not.

Moreover, an international special conference on problems of geometry teaching, which is to be organized together with the International Commission on Mathematics Instruction (ICMI) as well as a symposium on basic problems of cognitive learning are planned for 1974. Furthermore, the IDM will assist in arranging the programme for the 3rd International Conference on Mathematical Education that is to take place in the Federal Republic of Germany (Karlsruhe) in 1976 and which 2000 participants from all over the world are expected to attend.

The city of Bielefeld provides most convenient conditions for a cooperation of the IDM with local institutions. In addition to the university departments of mathematics and of pedadogy, philosophy, psychology with which the IDM keeps up close institutional contacts in the field of research and teaching, mention might be made of the Zentrum für interdisziplinäre Forschung, the Institut für mathematische Wirtschaftsforschung, the Laborschule and the Oberstufenkolleg of the University of Bielefeld, the Pädagogische Hochschule and the schools in the Bielefeld area.

The address of the Institute is:
Institut für Didaktik
der Mathematik
Universität Bielefeld
D-*4801 Jöllenbeck* (FRG)
Heidsieker Heide 94
Tel.: 05206/2505-6



Stichting Gelderse Leergangen

De Stichting vraagt per 1 augustus a.s. voor haar opleiding tot leraar 2e/3e graad wis- en natuurkunde

een **Hoofddocent(e) wiskunde**

(Herhaalde oproep)

Salariëring volgens rangenstelsel voor wetenschappelijke ambtenaren (maximaal f 4.651,— bruto per maand).

enige **Docenten wiskunde**

enige **Docenten natuurkunde**

Bij de samenstelling van de onderwijsteams wordt ervan uitgegaan dat per team minstens een van de medewerkers zich gespecialiseerd heeft op vakdidactisch terrein.
Salariëring volgens rangenstelsel voor wetenschappelijke ambtenaren (maximaal f 3.882,— bruto per maand).

De aanstelling van alle bovengenoemde (hoofd)docenten vindt plaats in een volledige betrekking. Van hen allen wordt verwacht, dat zij

- belangstelling hebben voor ontwikkelingen in hun vakgebied;
- zich interesseren voor onderwijsproblemen en open staan voor een experimentele benadering ervan;
- een eerstegraadsbevoegdheid bezitten;
- in staat en bereid zijn in samenwerking met collegae, ook van andere disciplines, en studenten vorm te geven aan een opleiding tot leraar;
- enige onderwijservaring hebben.

Van de hoofddocent(e) wordt bovendien verwacht dat hij/zij beschikt over organisatorische kwaliteiten.

Gegadigden voor een van deze functies worden uitgenodigd binnen 10 dagen hun sollicitatie met curriculum vitae en referenties te richten aan de directeur, Drs. J. Classen, Graafseweg 274 te Nijmegen, bij wie tevens inlichtingen kunnen worden ingewonnen (080-775233).

INHOUD